

# 7. 固有値・固有空間

---

- 7. 1. 線型変換と正方行列の同等性
- 7. 2. 固有値と固有ベクトル
- 7. 3. 固有空間
- 7. 4. 固有多項式
- 7. 5. 行列の標準形

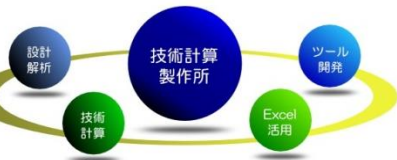
固有値の議論では、同じ定理や命題に対し“行列表現”と“線型変換表現”の二通りが存在する。実際表現のしやすい方で語れば、どちらも同じ意味なので問題ないのかもしれないが、書籍によっては混在して説明されるのでいまいちしっかりこないことがある。

そこで本節では、“行列表現”と“線型変換表現”が同等であることの根拠となる、次の二点についてははじめに明示する。

(1) 線型変換空間 $L(V, V)$ と正方行列空間 $M(n, n; K)$ は全く同じ代数的構造を有する

(2) 任意の基底変換 $\equiv$ 任意の正則行列

基本は“線型変換表現”を用い、具体的な計算に関連する内容（固有多項式、行列の標準形）については“行列表現”を用いて話を進めることにする。



# 7. 1. 線型変換と正方行列の同等性

線型変換全体の線型写像空間： $L(V, V)$ 、正方行列空間 $M(n, n: K)$ について  
写像 $M: L(V, V) \rightarrow M(n, n: K)$ は以下の性質を満足する

命題7.1-1)  $L(V, V)$ と $M(n, n: K)$ の同等性

- (1) 写像 $M$ は全単射、つまり同型写像
- (2) 写像 $M$ は積を保存
- (3) 写像 $M$ は $V$ の恒等変換 $I$ を単位行列 $E$ に写す
- (4) 写像 $M$ は正則な線型変換 $T$ を正則行列 $A$ に写す

証明省略

$L(V, V)$ と $M(n, n: K)$ は全く同じ対数的構造を持つ

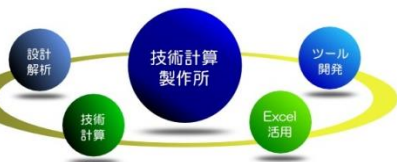
**線型変換の性質を知る  $\equiv$  正方行列の性質を知る**

つまり、 $A \in M(n, n: K)$ を表現行列とする線型変換 $L: K^n \rightarrow K^n$ 、 $V \cong K^n$ であるから、

$\forall v \in V, T \in L(V, V)$ に対し $T(v)$ について成り立つ

$\equiv$

$\forall x \in K^n, A \in M(n, n: K)$ に対し $Ax$ について成り立つ



# 7. 1. 線型変換と正方行列の同等性

$V$ の基底( $\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n$ )によって定まる

線型変換 $T$ の表現行列 $A$

$$(T(\mathbf{v}_1) \cdots T(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)A$$

$V$ の別の基底( $\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n$ )によって定まる

線型変換 $T$ の表現行列 $A'$

$$(T(\mathbf{v}'_1) \cdots T(\mathbf{v}'_n)) = (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n)A'$$



$A$ と $A'$ の関係を求める

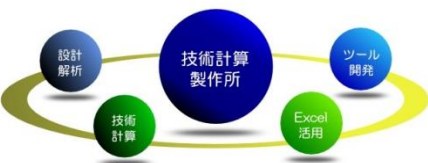
$V$ の基底変換行列 $P$ を用いて

$$\begin{cases} (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n) = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)P \\ (T(\mathbf{v}'_1) \cdots T(\mathbf{v}'_n)) = (T(\mathbf{v}_1) \cdots T(\mathbf{v}_n))P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (T(\mathbf{v}'_1) \cdots T(\mathbf{v}'_n)) &= (T(\mathbf{v}_1) \cdots T(\mathbf{v}_n))P \\ &= (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)AP \\ &= (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n)P^{-1}AP \end{aligned}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

この関係式は、後の行列の対角化、三角化において非常に重要な役割を担う



# 7. 1. 線型変換と正方行列の同等性

任意の基底変換は正則  $\Leftrightarrow$  任意の正則行列は基底変換

証明 \*\*\*\*\*

(1) 任意の基底変換は正則  $\Rightarrow$  任意の正則行列は基底変換

$V$ の2つの基底 $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n), (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n)$ に対し、基底変換行列 $P, P'$ を用いて

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n) &= (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)P \\ (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) &= (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n)P' \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) &= (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)PP' \\ (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n) &= (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n)P'P \end{aligned} \Rightarrow PP' = E \wedge P'P = E$$

以上より、任意の基底変換は正則。

(2) 任意の基底変換は正則  $\Rightarrow$  任意の正則行列は基底変換

$V$ の2つの基底 $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ に対し正則行列 $P$ を作用させると

$$(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) = \left( \sum_{j=1}^n p_{j1} \mathbf{v}_j \cdots \sum_{j=1}^n p_{jn} \mathbf{v}_j \right) = (\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n) \in V$$

このとき、 $c_1 \cdots c_n \in K$ を用いて $\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n$ の線型関係をつくると、

$$c_1 \mathbf{v}'_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}'_n = c_1 \sum_{j=1}^n p_{j1} \mathbf{v}_j + \cdots + c_n \sum_{j=1}^n p_{jn} \mathbf{v}_j = (c_1 p_{11} + \cdots + c_1 p_{n1}) \mathbf{v}_1 + \cdots + (c_1 p_{1n} + \cdots + c_1 p_{nn}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

$\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n$ は線型独立ゆえ、

$$\left. \begin{aligned} c_1 p_{11} + \cdots + c_1 p_{n1} &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 p_{1n} + \cdots + c_1 p_{nn} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Pc = \mathbf{0}$$

つまり、 $\mathbf{v}'_1 \cdots \mathbf{v}'_n$ も線型独立  $\Rightarrow V$ の基底

\*\*\*\*\* おわり

設計  
解析

技術計算  
製作所

ツール  
開発

技術  
計算

Excel  
活用

技術計算製作所

<http://gijyutsu-keisan.com/>

## 7. 2. 固有値と固有ベクトル

### <固有値・固有ベクトルの定義>

$K$ 線型空間 $V$ の線型変換 $T$ が、 $\alpha \in K, v \in V$ に対し、

$$T(v) = \alpha v \quad \wedge \quad v \neq 0 \quad \dots (*)$$

を満たす $\alpha$ を $T$ の固有値、 $v$ を $\alpha$ に属する $T$ の固有ベクトルと呼ぶ。

また、 $T$ の固有値全体のなす集合を $T$ のスペクトルと呼ぶ。

固有値の定義から、 $\alpha$ は重複すること、 $\alpha = 0$ もありうる  
固有ベクトル $v$ の線型変換による像 $T(v)$ は自身のスカラー倍 $\alpha v$

命題7.2-1) 固有値・固有ベクトルの一意性・任意性

- (1) 固有ベクトル $v$ に対して固有値 $\alpha$ は一意
- (2) 固有値 $\alpha$ に対して固有ベクトル $v$ は一意ではない

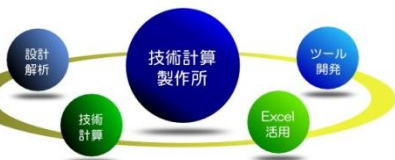
証明省略

### <行列表現での固有値・固有ベクトルの定義>

$A \in M(n, n; K), \alpha \in K, x \in K^n$ に対し、

$$Ax = \alpha x \quad \wedge \quad x \neq 0$$

を満たす $\alpha$ を $A$ の固有値、 $x$ を $\alpha$ に属する $A$ の固有ベクトル



## 7. 2. 固有値と固有ベクトル

命題7.2-2) 相違な固有ベクトルは線型独立

線型変換 $T$ の相違な固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n$ は線型独立

証明 \*\*\*\*\*

帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき、固有ベクトルの定義により $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ ゆえ線型独立。

$n \geq 2$ のとき命題が成り立つと仮定する。 $c_i \in K$ として

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \cdots (1)$$

を考える。この両辺に線型変換 $T$ を作用させると、

$$c_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n T(\mathbf{v}_n) = c_1 \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

他方、(1)式の両辺に $\alpha_n$ を作用させると、

$$c_1 \alpha_n \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

この二式の差分をとると、

$$c_1 (\alpha_n - \alpha_1) \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$$

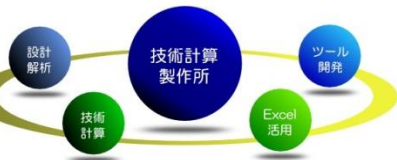
帰納法の仮定により

$$c_i (\alpha_n - \alpha_i) = 0$$

命題の前提により $\alpha_i$ は相違ゆえ、 $c_i = 0$ 。よって(1)から $c_n = 0$ が得られ、(1)を満足する条件は

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

\*\*\*\*\* おわり



## 7. 3. 固有空間

### <固有空間の定義>

$K$ 線型空間 $V$ の線型変換 $T$ 、その固有値を $\alpha$ とするとき、  
 $\alpha$ に属するすべての固有ベクトルと零ベクトル $\mathbf{o}$ で作る部分集合 $W(\alpha)$

$$T(\mathbf{v}) = \alpha \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (T - \alpha I)(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \in \text{Ker}(T - \alpha I)$$

つまり、 $W(\alpha) = \text{Ker}(T - \alpha I)$ は $V$ の部分空間

### 命題7.3-1) 固有空間の和

線型変換 $T$ の相違な固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ に対し、固有空間の和 $Z$ は直和

$$Z = W(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus W(\alpha_n)$$

証明 \*\*\*\*\*

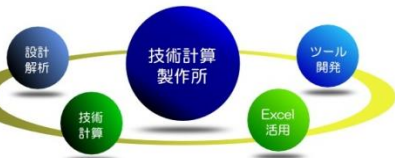
$Z = W(\alpha_1) + \cdots + W(\alpha_n)$ とおく。 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_i \in W(\alpha_i)$ を用いて $\mathbf{z} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n = \mathbf{v}'_1 + \cdots + \mathbf{v}'_n \in Z$ とおく。

$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i$ とおけば、 $\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n = \mathbf{o} \quad \mathbf{u}_i \in W(\alpha_i) \quad \cdots (1)$

命題7.2-2によって相違なる固有値に属する固有ベクトルは線型独立ゆえ $W(\alpha_i) \cap W(\alpha_j) = \emptyset \quad (i \neq j)$ であり、(1)式を満足するため $\mathbf{u}_1 = \cdots = \mathbf{u}_n = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$ 。

つまり、 $\forall \mathbf{z} \in Z$ を $W(\alpha_i)$ の元の和で表す方法は一意かつ $W(\alpha_i) \cap W(\alpha_j) = \emptyset$ ゆえ $Z$ は $W(\alpha_i)$ の直和

\*\*\*\*\* おわり



## 7. 4. 固有多項式

### 7. 4. 1. 代数学の基本定理

固有値に関する様々な性質は、“代数学の基本定理”に基づく

<代数学の基本定理>

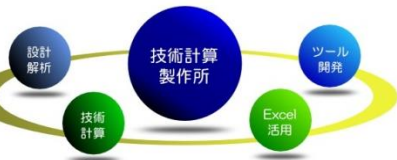
複素数体 $C$ の多項式 ( $n \geq 1$ ) は、 $C$ において一次式の積に分解できる

$$f(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_nt^n \in C[t]$$

に対し

$$f(t) = c_n(t - a_1) \dots (t - a_n) \quad (a_1, \dots, a_n \in C)$$

※この定理は実数体 $R$ では必ずしも成立しない (例:  $t^2 + 1 = 0$ )





# 7. 4. 固有多項式

## 7. 4. 2. 固有多項式

### <固有多項式の定義>

$n$ 次正方行列 $A$ の行列式によって表現される $n$ 次多項式 $f(t)$

$$f(t) = \det(tE_n - A) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix}$$

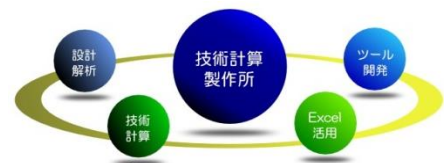
### <固有和（跡）の定義>

$n$ 次正方行列 $A$ の対角成分の和： $\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

固有多項式を成分表示すれば、

$$f(t) = t^n - (\text{tr}A)t^{n-1} + \cdots + c_1t + (-1)^n \det A$$

※固有多項式の $\text{tr}A$ ,  $\det A$ 以外の係数を求めるのは困難



# 7. 4. 固有多項式

## 7. 4. 2. 固有多項式

命題7.4.2-1) 固有値 = 固有多項式の零点

$A \in M(n, n; K)$  に対し、 $\alpha$  が  $A$  の固有値  $\Leftrightarrow \alpha$  が固有多項式  $\det(\alpha E - A)$  の零点

証明省略

命題7.4.2-2) 固有値の存在

複素数体  $C$  に対し、 $\forall A \in M(n, n; C)$  は  $C$  上で重複を含め必ず  $n$  個の固有値を持つ。

代数学の基本定理そのもの

命題7.4.2-3) 上三角行列の固有多項式

$A \in M(n, n; K)$  が上三角行列のとき、 $A$  の固有多項式は  $A$  の対角成分のみで決まる。

証明 \*\*\*\*\*

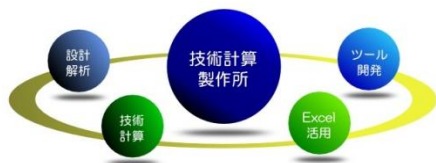
行列  $A$  は上三角行列なので次のように分けできる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (A_{22} \in M(n-1, n-1; K) \text{ かつ上三角行列})$$

このとき、 $\det(tE_n - A) = (t - a_{11}) \det(tE_{n-1} - A_{22})$ 。これを  $A_{33}, A_{44} \dots$  と繰り返せば良い。

\*\*\*\*\* おわり

つまり、固有値は行列を上（下）三角化すれば求まる



# 7. 4. 固有多項式

## 7. 4. 2. 固有多項式

命題7.4.2-4) 固有多項式の不変性

$A \in M(n, n: K)$  に対し正則な  $P \in M(n, n: K)$  があって、

$P^{-1}AP$  の固有多項式 =  $A$  の固有多項式 (従って、 $\text{tr}A, \det A$  も不変)

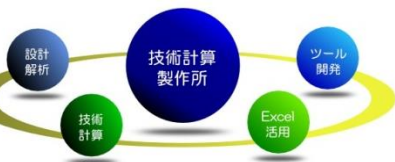
証明 \*\*\*\*\*

$$\begin{aligned}\det(tE_n - P^{-1}AP) &= \det\{P^{-1}(tE_n - A)P\} \quad (\because P^{-1}P = E) \\ &= |P^{-1}| \det\{(tE_n - A)\} |P| \\ &= \det\{(tE_n - A)\} \quad (\because |P^{-1}| = |P|^{-1})\end{aligned}$$

\*\*\*\*\* おわり

この命題を “線型変換表現” すれば、

線型変換  $T: V \rightarrow V$  の固有多項式は、 $V$  の基底に依らない



# 7. 5. 行列の標準形

## 7. 5. 1. 行列の三角化

行列の（上）三角化によるメリット

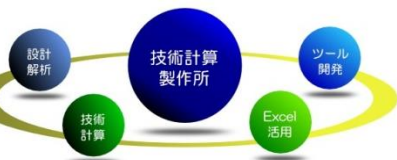
- (1) 上三角 $\wedge$ 下三角行列 = 対角行列
- (2) 三角行列の対角要素は固有値
- (3) 上（下）三角行列同士を掛けても上（下）三角行列
- (4) 三角行列の行列式は対角要素の積で定まる
- (5) 三角行列の対角要素に“0”がなければ逆行列を持つ

これらの性質をうまく利用→行列演算を効率的に実施

定理7.5.1-1) 三角化定理

$V$ の一つの基底に関する線型変換 $T$ の表現行列 $A$ が上三角行列となるための必要十分条件  
「 $T$ の固有多項式が $K$ 上で一次式の積に分解できる」

証明は次頁



# 7. 5. 行列の標準形

## 7. 5. 1. 行列の三角化

三角化定理の証明 \*\*\*\*\*

帰納法を用いる。

$n = 1$  のとき  $\forall A = (a)$  は上三角行列で固有多項式も一次式である。

$n \geq 2$  のとき、 $n - 1$  次行列で定理が成り立つと仮定する。

まずは  $A$  が上三角行列ならば、命題 7.4.2-3 によって  $A$  の固有多項式は  $K$  上で一次式の積に分解できる。

次に、 $A$  の固有多項式が一次式の積に分解できるとする。

$$\det(tE - A) = (t - a_1) \cdots (t - a_n)$$

$\det(a_1 E - A) = 0$  ゆえ  $a_1$  は  $A$  の固有値。その固有ベクトルを  $\mathbf{v}_1$  ととれば、基底の延長定理 (定理 2.5-1) により  $V$  の基底を  $(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)$  とできる。このとき  $V$  は  $(\mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)$  で生成される  $V$  の部分空間  $U$  を用いて  $V = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus U$ 。

$\forall \mathbf{u} \in U \subseteq V$  であるから  $T(\mathbf{u}) = c\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}'$  とする  $c \in K, \mathbf{u}' \in U$  が一意に定まる。

ここで  $\mathbf{u}$  を  $\mathbf{u}'$  に対応させる写像  $T_{n-1}: U \rightarrow U$  をとると、

$$T(\mathbf{u}) = c\mathbf{v}_1 + T_{n-1}(\mathbf{u}) = c\mathbf{v}_1 + T_{n-1}(c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) \quad \cdots (*)$$

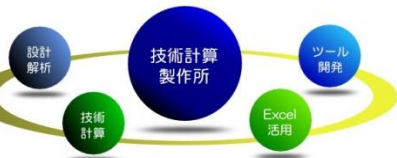
$T_{n-1}$  が線形写像であることは、

$$\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in U \text{ に対し、 } c\mathbf{v}_1 + T_{n-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = c_1\mathbf{v}_1 + T_{n-1}(\mathbf{w}_1) + c_2\mathbf{v}_1 + T_{n-1}(\mathbf{w}_2)$$

( $\because$  左辺は (\*) 式に代入、右辺は  $T$  が線型変換であることから求まる)

同様にスカラー倍  $T(c\mathbf{w}) = cT(\mathbf{w})$  についても言える。

(次頁へ続く)



# 7. 5. 行列の標準形

## 7. 5. 1. 行列の三角化

(前頁からのつづき)

$T_{n-1}$ の基底( $\mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n$ )に関する表現行列を $A_{n-1}$ とすれば

$$(T_{n-1}(\mathbf{u}_2) \cdots T_{n-1}(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n)A_{n-1}$$

$T$ の基底( $\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n$ )に関する表現行列 $A$ は

$$(T(\mathbf{v}_1) T(\mathbf{u}_2) \cdots T(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n)A$$

$T(\mathbf{v}_1) = a_1 \mathbf{v}_1$ であるから

$$T(\mathbf{v}_1) = a_1 \mathbf{v}_1$$

$$T(\mathbf{u}_2) = a_{12} \mathbf{v}_1 + \dots + a_{2n} \mathbf{u}_n \quad \Leftrightarrow \quad (T(\mathbf{v}_1) T(\mathbf{u}_2) \cdots T(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{u}_n) = a_{1n} \mathbf{v}_1 + a_{2n} \mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn} \mathbf{u}_n$$

よって、 $A$ の固有多項式は

$$\begin{aligned} \det(tE_n - A) &= (t - a_1) \det(tE_{n-1} - A_{n-1}) = (t - a_1)(t - a_2) \cdots (t - a_n) \\ &\Rightarrow \det(tE_{n-1} - A_{n-1}) = (t - a_2) \cdots (t - a_n) \end{aligned}$$

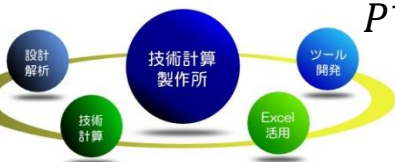
帰納法の仮定により $T_{n-1}$ の表現行列 $A_{n-1}$ は $U$ の適当な基底を選んで上三角行列となるから、 $T$ の表現行列 $A$ もまた上三角行列となる。

\*\*\*\*\* おわり

### <三角化定理の行列表現>

$A \in M(n, n; K)$ に対し、正則行列 $P \in M(n, n; K)$ があって、 $P^{-1}AP$ が上三角行列になるための必要十分条件は、 $A$ の固有多項式が $K$ において一次式の積に分解できることである。

$$P^{-1}AP \text{が上三角行列} \quad \Leftrightarrow \quad \det(tE - A) = (t - a_1) \cdots (t - a_n)$$



# 7. 5. 行列の標準形

## 7. 5. 2. 行列の対角化

対角行列 = 対角要素以外すべて“0” → 演算は非常に簡単

この性質を利用して、連立方程式や固有値計算を簡単に行うことができる

### 定理7.5.2-1) 対角化定理

$V$ の一つの基底に関する線型変換 $T$ の表現行列 $A$ が対角行列となるための必要十分条件  
「 $T$ の固有ベクトルから成る $V$ の基底が存在」

証明 \*\*\*\*\*

$A$ が対角行列なら $V$ の一つの基底( $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n$ )の $T$ による像は、表現行列の定義に従い、

$$(T(\mathbf{v}_1) \dots T(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)A = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = (a_1\mathbf{v}_1 \dots a_n\mathbf{v}_n) \Rightarrow T(\mathbf{v}_i) = a_i\mathbf{v}_i$$

つまり、 $a_i$ は $T$ の固有値、 $\mathbf{v}_i$ は $a_i$ に属する固有ベクトル。

次に $V$ の基底( $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n$ )を $T$ の固有ベクトルとし、対応する固有値を $a_1 \dots a_n$ とする。このとき $T(\mathbf{v}_i) = a_i\mathbf{v}_i$ ゆえ

$$(T(\mathbf{v}_1) \dots T(\mathbf{v}_n)) = (a_1\mathbf{v}_1 \dots a_n\mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

となって、 $T$ の表現行列は対角行列となる。

\*\*\*\*\* おわり

この証明より、 $T$ の表現行列は固有値 $a_1 \dots a_n$ を対角成分とする対角行列



# 7. 5. 行列の標準形

## 7. 5. 2. 行列の対角化

定理7.5.2-2) 固有ベクトルが基底を構成する条件

$T$ が $n$ 個の相異なる固有値 $a_1 \cdots a_n \in K$ を持つとき、それらに属する $T$ の固有ベクトル $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ は $V$ の基底を成す。

証明省略

命題7.5.2-1) 対角化の変換行列

$\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n$ が $A$ の固有ベクトルで、 $A\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n = a_n\mathbf{v}_n$ が成り立つとき、 $n$ 次行列 $P = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ によって、 $P^{-1}AP$ は対角行列となる。

証明 \*\*\*\*\*

$$(A\mathbf{v}_1 \cdots A\mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$P$ を構成する列ベクトルは互いに独立なため正則。

\*\*\*\*\* おわり

