7．固有値・固有空間

固有値の議論では、同じ定理や命題に対し“行列表現”と“線型変換表現”の二通りが存在する。実際表現のしやすい方で語れれば、どちらも同じ意味なので問題ないのかもしれないが、書籍によっては混在して説明されるのでいまいちしっくりこないことがある。
そこで本節では、行列表現”と“線型変換表現”が同等であることの根拠となる、次の二点についてはじめに明示する。

（1）線型変換空間$L(V,V)$と正方行列空間$M(n,n:K)$は全く同じ代数的構造を有する

（2）任意の基底変換≡任意の正則行列

基本は“線型変換表現”を用い、具体的な計算に関連する内容（固有多項式、行列の標準形）については“行列表現”を用いて話を進めることにする。

7．1．線型変換と正方行列の同等性

線型変換全体の線型写像空間：$L(V,V)$、正方行列空間$M(n,n:K)$について

写像$M: L(V,V) \to M(n,n:K)$は以下の性質を満足する

命題7.1-1） $L(V,V)$と$M(n,n:K)$の同等性

（1）写像Mは全単射、つまり同型写像

（2）写像Mは積を保存

（3）写像MはVの恒等変換Iを単位行列Eに写す

（4）写像Mは正則な線型変換Tを正則行列Aに写す

証明省略

$L(V,V)$と$M(n,n:K)$は全く同じ対数的構造を持つ

線型変換の性質を知る≡正方行列の性質を知る

つまり、$A \in M(n,n:K)$を表現行列とする線型変換$L: K^n \to K^n$、 $V \cong K^n$であるから、

$\forall \boldsymbol{v} \in V, T \in L(V,V)$に対し$T(\boldsymbol{v})$について成り立つ

≡

$\forall \boldsymbol{x} \in K^n, A \in M(n,n:K)$に対し$A\boldsymbol{x}$について成り立つ

7．1．線型変換と正方行列の同等性

Vの基底$(\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_n})$によって定まる
線型変換Tの表現行列A

$$\left(T(\boldsymbol{v_1})\cdots T(\boldsymbol{v_n})\right) = (\boldsymbol{v_1}\cdots \boldsymbol{v_n})A$$

Vの別の基底$(\boldsymbol{v'_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v'_n})$によって定まる
線型変換Tの表現行列A'

$$\left(T(\boldsymbol{v'_1})\cdots T(\boldsymbol{v'_n})\right) = (\boldsymbol{v'_1}\cdots \boldsymbol{v'_n})A'$$

AとA'の関係を求める

Vの基底変換行列Pを用いて
$$\begin{cases} (\boldsymbol{v'_1}\cdots \boldsymbol{v'_n}) = (\boldsymbol{v_1}\cdots \boldsymbol{v_n})P \\ \left(T(\boldsymbol{v'_1})\cdots T(\boldsymbol{v'_n})\right) = \left(T(\boldsymbol{v_1})\cdots T(\boldsymbol{v_n})\right)P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(T(\boldsymbol{v'_1})\cdots T(\boldsymbol{v'_n})\right) &= \left(T(\boldsymbol{v_1})\cdots T(\boldsymbol{v_n})\right)P \\ &= (\boldsymbol{v_1}\cdots \boldsymbol{v_n})AP \\ &= (\boldsymbol{v'_1}\cdots \boldsymbol{v'_n})P^{-1}AP \end{aligned}$$

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

この関係式は、後の行列の対角化、三角化において非常に重要な役割を担う

7. 1. 線型変換と正方行列の同等性

任意の基底変換は正則　⇔　任意の正則行列は基底変換

証明　********************

（1）任意の基底変換は正則　⇒　任意の正則行列は基底変換

Vの2つの基底$(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_n}), (\boldsymbol{v'_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v'_n})$に対し、基底変換行列$P, P'$を用いて

$$\begin{matrix}(\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n}) = (\boldsymbol{v_1}\cdots\boldsymbol{v_n})P \\ (\boldsymbol{v_1}\cdots\boldsymbol{v_n}) = (\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n})P'\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}(\boldsymbol{v_1}\cdots\boldsymbol{v_n}) = (\boldsymbol{v_1}\cdots\boldsymbol{v_n})PP' \\ (\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n}) = (\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n})P'P\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad PP' = E \wedge P'P = E$$

以上より、任意の基底変換は正則。

（2）任意の基底変換は正則　⇒　任意の正則行列は基底変換

Vの2つの基底$(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_n})$に対し正則行列$P$を作用させると

$$(\boldsymbol{v_1}\cdots\boldsymbol{v_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{j1}\boldsymbol{v_j}\ \cdots \sum_{j=1}^{n} p_{jn}\boldsymbol{v_j}\right) = (\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n}) \in \mathrm{V}$$

このとき、$c_1\cdots c_n \in K$を用いて$\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n}$の線型関係をつくると、

$$c_1\boldsymbol{v'_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v'_n} = c_1\sum p_{j1}\boldsymbol{v_j} + \cdots + c_n\sum p_{jn}\boldsymbol{v_j} = (c_1p_{11} + \cdots + c_1p_{n1})\boldsymbol{v_1} + \cdots + (c_1p_{1n} + \cdots + c_1p_{nn})\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_n}$は線型独立ゆえ、

$$\left.\begin{matrix} c_1p_{11} + \cdots + c_1p_{n1} = 0 \\ \cdots \\ c_1p_{1n} + \cdots + c_1p_{nn} = 0 \end{matrix}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad P\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$$

つまり、 $\boldsymbol{v'_1}\cdots\boldsymbol{v'_n}$も線型独立　⇒　Vの基底

********************　おわり

7．2．固有値と固有ベクトル

＜固有値・固有ベクトルの定義＞

K線型空間Vの線型変換Tが、$\alpha \in K, \boldsymbol{v} \in V$に対し、

$$T(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v} \quad \wedge \quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o} \quad \cdots(*)$$

を満たすαをTの**固有値**、$\boldsymbol{v}$をαに属するTの**固有ベクトル**と呼ぶ。
また、Tの固有値全体のなす集合をTの**スペクトル**と呼ぶ。

固有値の定義から、αは重複することも、$\alpha = 0$もありうる
固有ベクトル$\boldsymbol{v}$の線型変換による像$T(\boldsymbol{v})$は自身のスカラー倍$\alpha\boldsymbol{v}$

命題7.2-1）固有値・固有ベクトルの一意性・任意性
（1）固有ベクトル$\boldsymbol{v}$に対して固有値αは一意
（2）固有値αに対して固有ベクトル$\boldsymbol{v}$は一意ではない

証明省略

＜行列表現での固有値・固有ベクトルの定義＞

$A \in M(n, n{:}\,K), \alpha \in K, \boldsymbol{x} \in K^n$に対し、

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x} \neq o$$

を満たすαをAの**固有値**、$\boldsymbol{x}$をαに属するAの**固有ベクトル**

7. 2. 固有値と固有ベクトル

命題7.2-2）相違な固有ベクトルは線型独立
　線型変換Tの相違な固有値$\alpha_1 \cdots \alpha_n$に属する固有ベクトル$\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n}$は線型独立

証明　********************

帰納法で証明する。

$n = 1$のとき、固有ベクトルの定義により$\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{o}$ゆえ線型独立。

$n \geqq 2$のとき命題が成り立つと仮定する。$c_i \in K$として

$$c_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{o} \quad \cdots(1)$$

を考える。この両辺に線型変換Tを作用させると、

$$c_1T(\boldsymbol{v_1}) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v_n}) = c_1\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_n\alpha_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{o}$$

他方、（1）式の両辺にα_nを作用させると、

$$c_1\alpha_n\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_n\alpha_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{o}$$

この二式の差分をとると、

$$c_1(\alpha_n - \alpha_1)\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})\boldsymbol{v_{n-1}} = \boldsymbol{o}$$

帰納法の仮定により

$$c_i(\alpha_n - \alpha_i) = 0$$

命題の前提によりα_iは相違ゆえ、$c_i = 0$。よって（1）から$c_n = 0$が得られ、（1）を満足する条件は

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

********************　おわり

7．3．固有空間

＜固有空間の定義＞

K線型空間Vの線型変換T、その固有値をαとするとき、
αに属するすべての固有ベクトルと零ベクトルoで作る部分集合$W(\alpha)$

$$T(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad (T - \alpha I)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T - \alpha I)$$

つまり、$W(\alpha) = \mathrm{Ker}(T - \alpha I)$は$V$の部分空間

命題7.3-1）固有空間の和
線型変換Tの相違な固有値$\alpha_1 \cdots \alpha_n$に対し、固有空間の和Zは直和

$$Z = W(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus W(\alpha_n)$$

証明　********************

$Z = W(\alpha_1) + \cdots + W(\alpha_n)$とおく。$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_i \in W(\alpha_i)$を用いて$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}'_1 + \cdots \boldsymbol{v}'_n \in Z$とおく。

$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}'_i - \boldsymbol{v}_i$とおけば、$\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o} \quad \boldsymbol{u}_i \in W(\alpha_i) \quad \cdots (1)$

命題7.2-2によって相違なる固有値に属する固有ベクトルは線型独立ゆえ$W(\alpha_i) \cap W(\alpha_j) = \emptyset \quad (i \neq j)$であり、（1）式を満足するため$\boldsymbol{u}_1 = \cdots = \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i$。

つまり、$\forall z \in Z$を$W(\alpha_i)$の元の和で表す方法は一意かつ$W(\alpha_i) \cap W(\alpha_j) = \emptyset$ゆえ$Z$は$W(\alpha_i)$の直和

******************** おわり

7．4．固有多項式

7．4．1．代数学の基本定理

固有値に関する様々な性質は、“代数学の基本定理”に基づく

＜代数学の基本定理＞

複素数体Cの多項式（$n \geqq 1$）は、Cにおいて一次式の積に分解できる

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n \in C[t]$$

に対し

$$f(t) = c_n(t - a_1)\cdots(t - a_n) \quad (a_1, \cdots, a_n \in C)$$

※この定理は実数体Rでは必ずしも成立しない（例：$t^2 + 1 = 0$）

7．4．2．固有多項式

＜固有多項式の定義＞

n次正方行列Aの行列式によって表現されるn次多項式$f(t)$

$$f(t)=\det(tE_n-A)=\begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{vmatrix}$$

＜固有和（跡）の定義＞

n次正方行列Aの対角成分の和： $\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

固有多項式を成分表示すれば、

$$f(t)=t^n-(\mathrm{tr}A)t^{n-1}+\cdots+c_1t+(-1)^n\det A$$

※固有多項式の$\mathrm{tr}A$, $\det A$以外の係数を求めるのは困難

7．4．固有多項式

7．4．2．固有多項式

命題7.4.2-1）固有値 = 固有多項式の零点
$A \in M(n,n\colon K)$に対し、αがAの固有値　$\Leftrightarrow$　αが固有多項式$\det(\alpha E - A)$の零点

証明省略

命題7.4.2-2）固有値の存在
複素数体Cに対し、$\forall A \in M(n,n\colon C)$は$C$上で重複を含め必ず$n$個の固有値を持つ。

代数学の基本定理そのもの

命題7.4.2-3）上三角行列の固有多項式
$A \in M(n,n\colon K)$が上三角行列のとき、Aの固有多項式はAの対角成分のみで決まる。

証明　********************
行列Aは上三角行列なので次のように区分けできる。

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ \boldsymbol{o} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (A_{22} \in M(n-1,n-1\colon K)\text{かつ上三角行列})$$

このとき、$\det(tE_n - A) = (t - a_{11})\det(tE_n - A_{22})$。これを$A_{33}, A_{44}\cdots$と繰り返せば良い。

******************** おわり

つまり、固有値は行列を上（下）三角化すれば求まる

7．4．2．固有多項式

命題7.4.2-4）固有多項式の不変性

$A \in M(n,n:K)$に対し正則な$P \in M(n,n:K)$があって、

$P^{-1}AP$の固有多項式$=A$の固有多項式　（従って、$\mathrm{tr}A, \det A$も不変）

証明　********************

$$\begin{aligned}\det(tE_n - P^{-1}AP) &= \det\{P^{-1}(tE_n - A)P\} \quad (\because P^{-1}P = E)\\ &= |P^{-1}| \det\{(tE_n - A)\} |P|\\ &= \det\{(tE_n - A)\} \quad (\because |P^{-1}| = |P|^{-1})\end{aligned}$$

********************　おわり

この命題を“線型変換表現”すれば、

線型変換$T: V \to V$の固有多項式は、Vの基底に依らない

7．5．行列の標準形

7．5．1．行列の三角化

行列の（上）三角化によるメリット

（1）上三角∧下三角行列 = 対角行列
（2）三角行列の対角要素は固有値
（3）上（下）三角行列同士を掛けても上（下）三角行列
（4）三角行列の行列式は対角要素の積で定まる
（5）三角行列の対角要素に“0”がなければ逆行列を持つ

これらの性質をうまく利用→行列演算を効率的に実施

定理7.5.1-1）三角化定理
Vの一つの基底に関する線型変換Tの表現行列Aが上三角行列となるための必要十分条件
「Tの固有多項式がK上で一次式の積に分解できる」

証明は次頁

7．5．行列の標準形

7．5．1．行列の三角化

三角化定理の証明　*********************

帰納法を用いる。

$n=1$のとき$\forall A=(a)$は上三角行列で固有多項式も一次式である。

$n \geqq 2$のとき、$n-1$次行列で定理が成り立つと仮定する。

まずはAが上三角行列ならば、命題7.4.2-3によってAの固有多項式はK上で一次式の積に分解できる。

次に、Aの固有多項式が一次式の積に分解できるとする。

$$\det\,(tE-A)=(t-a_1)\cdots(t-a_n)$$

$\det\,(a_1E-A)=0$ ゆえa_1はAの固有値。その固有ベクトルを$\boldsymbol{v_1}$ととれば、基底の延長定理（定理2.5-1）によりVの基底を$(\boldsymbol{v_1}\ \boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})$とできる。 このときVは$(\boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})$で生成される$V$の部分空間$U$を用いて $V=\langle\boldsymbol{v_1}\rangle\oplus U$。

$\forall\boldsymbol{u}\in U\subseteq V$であるから $T(\boldsymbol{u})=c\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{u}'$とする$c\in K,\boldsymbol{u}'\in U$が一意に定まる。

ここで$\boldsymbol{u}$を$\boldsymbol{u}'$に対応させる写像$T_{n-1}:U\to U$をとると、

$$T(\boldsymbol{u})=c\boldsymbol{v_1}+T_{n-1}(\boldsymbol{u})=c\boldsymbol{v_1}+T_{n-1}(c_2\boldsymbol{u_2}+\cdots+c_n\boldsymbol{u_n})\quad\cdots(*)$$

T_{n-1}が線形写像であることは、

$\forall\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2}\in U$に対し、$c\boldsymbol{v_1}+T_{n-1}(\boldsymbol{w_1}+\boldsymbol{w_2})=c_1\boldsymbol{v_1}+T_{n-1}(\boldsymbol{w_1}\,)+c_2\boldsymbol{v_1}+T_{n-1}(\boldsymbol{w_2})$

（∵左辺は（*）式に代入、右辺はTが線型変換であることから求まる）

同様にスカラー倍$T(c\boldsymbol{w})=cT(\boldsymbol{w})$についても言える。

（次頁へ続く）

7．5．行列の標準形

7．5．1．行列の三角化

（前頁からのつづき）

T_{n-1}の基底$(\boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})$に関する表現行列を$A_{n-1}$とすれば

$$(T_{n-1}(\boldsymbol{u_2})\cdots T_{n-1}(\boldsymbol{u_n}))=(\boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})A_{n-1}$$

Tの基底$(\boldsymbol{v_1}\ \boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})$に関する表現行列$A$は

$$\big(T(\boldsymbol{v_1})\ T(\boldsymbol{u_2})\cdots T(\boldsymbol{u_n})\big)=(\boldsymbol{v_1}\ \boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})A$$

$T(\boldsymbol{v_1})=a_1\boldsymbol{v_1}$であるから

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{v_1})&=a_1\boldsymbol{v_1}\\ T(\boldsymbol{u_2})&=a_{12}\boldsymbol{v_1}+a_{22}\boldsymbol{u_2}+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{u_n}\\ &\cdots\\ T(\boldsymbol{u_n})&=a_{1n}\boldsymbol{v_1}+a_{2n}\boldsymbol{u_2}+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{u_n}\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad \big(T(\boldsymbol{v_1})\ T(\boldsymbol{u_2})\cdots T(\boldsymbol{u_n})\big)=(\boldsymbol{v_1}\ \boldsymbol{u_2}\cdots\boldsymbol{u_n})\begin{pmatrix}a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

よって、Aの固有多項式は

$$\det\ (tE_n-A)=(t-a_1)\det\ (tE_{n-1}-A_{n-1})=(t-a_1)(t-a_2)\cdots(t-a_n)$$

$$\Rightarrow\det\ (tE_{n-1}-A_{n-1})=(t-a_2)\cdots(t-a_n)$$

帰納法の仮定によりT_{n-1}の表現行列A_{n-1}はUの適当な基底を選んで上三角行列となるから、Tの表現行列Aもまた上三角行列となる。

******************** おわり

＜三角化定理の行列表現＞

$A\in M(n,n\!:K)$に対し、正則行列$P\in M(n,n\!:K)$があって、$P^{-1}AP$が上三角行列になるための必要十分条件は、Aの固有多項式がKにおいて一次式の積に分解できることである。

$$P^{-1}AP\text{が上三角行列}\quad\Leftrightarrow\quad\det(tE-A)=(t-a_1)\cdots(t-a_n)$$

7．5．行列の標準形

7．5．2．行列の対角化

対角行列 = 対角要素以外すべて“0”　→　演算は非常に簡単

この性質を利用して、連立方程式や固有値計算を簡単に行うことができる

定理7.5.2-1）対角化定理

Vの一つの基底に関する線型変換Tの表現行列Aが対角行列となるための必要十分条件

「Tの固有ベクトルから成るVの基底が存在」

証明　********************

Aが対角行列ならVの一つの基底$(\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})$の$T$による像は、表現行列の定義に従い、

$$\big(T(\boldsymbol{v_1}) \cdots T(\boldsymbol{v_n})\big) = (\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})A = (\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})\begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix} = (a_1\boldsymbol{v_1} \cdots a_n\boldsymbol{v_n}) \quad \Rightarrow \quad T(\boldsymbol{v_i}) = a_i\boldsymbol{v_i}$$

つまり、a_iはTの固有値、 $\boldsymbol{v_i}$はa_iに属する固有ベクトル。

次にVの基底$(\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})$を$T$の固有ベクトルとし、対応する固有値を$a_1 \cdots a_n$とする。このとき $T(\boldsymbol{v_i}) = a_i\boldsymbol{v_i}$ゆえ

$$\big(T(\boldsymbol{v_1}) \cdots T(\boldsymbol{v_n})\big) = (a_1\boldsymbol{v_1} \cdots a_n\boldsymbol{v_n}) = (\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})\begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix}$$

となって、Tの表現行列は対角行列となる。

********************　おわり

この証明より、Tの表現行列は固有値$a_1 \cdots a_n$を対角成分とする対角行列

7．5．2．行列の対角化

定理7.5.2-2）固有ベクトルが基底を構成する条件
Tがn個の相違なる固有値$a_1 \cdots a_n \in K$を持つとき、それらに属するTの固有ベクトル
$(\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})$は$V$の基底を成す。

証明省略

命題7.5.2-1）対角化の変換行列
$\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n}$が$A$の固有ベクトルで、$A\boldsymbol{v_1} = a_1\boldsymbol{v_1}, \cdots, A\boldsymbol{v_n} = a_n\boldsymbol{v_n}$が成り立つとき、$n$次行列
$P = (\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})$によって、$P^{-1}AP$は対角行列となる。

証明　********************

$$(A\boldsymbol{v_1} \cdots A\boldsymbol{v_n}) = (\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n})\begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P\begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix}$$

Pを構成する列ベクトルは互いに独立なため正則。

********************　おわり