

6. 行列式

6. 1. 行列式の定義

6. 2. 置換・互換

6. 2. 1. 置換

6. 2. 2. 互換

6. 2. 3. 行列式の一意性定理

6. 3. 行列式の存在証明

6. 4. 行列式の計算

行列式： n 次行列を一つの値へ写すもの $\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, n; K) \rightarrow c \in K$

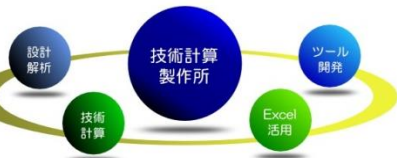
行列式の重要性は、行列式の定義式にあるのではなく、その基本的性質が

(1) 逆行列の存在判定

(2) 連立一次方程式の解法

(3) 固有値問題

の理論に用いられることにある。



6. 1. 行列式の定義

<行列式の定義>

関数 $\det: M(n, n: K) \rightarrow K$ が次の三つの公理（行列式の公理）を満足するもの

$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \in M(n, n: K), \mathbf{a}_j \in K^n, c \in K$ に対し、行列 A の行列式 $\det A$ とは

公理 I. : n 重線形性

$$(1) \det(\cdots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \cdots) = \det(\cdots \mathbf{a}_i \cdots) + \det(\cdots \mathbf{b}_i \cdots)$$

$$(2) \det(\cdots \mathbf{a}_i \cdots) = \det(\cdots c\mathbf{a}_i \cdots)$$

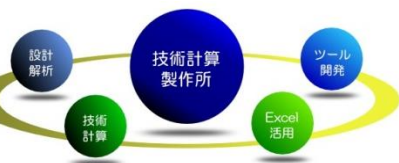
公理 II. : 交代性

A の二つの列が $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j (i \neq j)$ のとき、 $\det A = 0$

公理 III. : 正規化条件

$$\det E = 1$$

行列式はこの定義に従うものなら何でも構わないが、実際は**ただ一つ**に決まる



6. 1. 行列式の定義

命題6.1.1-1) 行列式の基本変形

(1) A の二つの列を交換するとき、行列式の符号が変わる

$$\det(\cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots) = -\det(\cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots)$$

(2) A のある列に他の列のスカラー倍を加えても行列式は不変

$$\det(\cdots \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots) = \det(\cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots)$$

命題6.1.1-2) 基底変換の基本行列の行列式

$B \in M(n, n; K)$ に対して、

(1) $T(i, j)$ 交換 : $\det BT(i, j) = -\det B$

(2) $M(i: c)$ スカラー倍 : $\det BM(i: c) = c \det B$

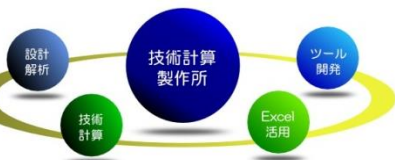
(3) $A(i, j: c)$ 追加 : $\det BA(i, j: c) = \det B$

命題6.1.1-3) 基本行列の行列式の積

P_1, \dots, P_k がすべていずれかの基本行列であるとき、 $\det(BP_1 \cdots P_k) = \det B \det P_1 \cdots \det P_k$

命題6.1.1-1~6.1.1-3) 証明省略

なお、 $B = E$ ととれば、 $\det T(i, j) = -1$ 、 $\det M(i: c) = c$ 、 $\det A(i, j: c) = 1$



6. 1. 行列式の定義

命題6.1.1-4) 行列式の演算

- (1) A が正則なら $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ が正則でないなら $\det A \neq 0$
- (2) $\det(AB) = \det A \det B$ 。特に A が正則なら $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- (3) $\det A = \det A^t$

証明省略

特に (3) によって、行列式の性質について “列” に関することは “行” に関しても成り立つ。

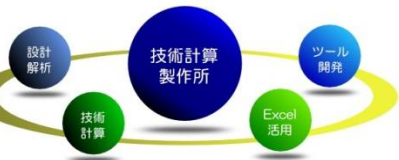
<小行列式の定義>

$A \in M(m, n; K)$ から勝手に p 個の行と列を取り出して作った p 次正方行列の行列式

命題6.1.1-5) 行列式の階数表現

$A \in M(m, n; K)$ の階数は、 A の0でない小行列式の最大次数に等しい

証明省略



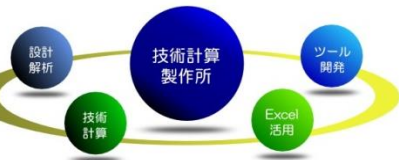
6. 1. 行列式の定義

行列 A の階数表現として、以下の五つは同等

命題6.1.1-6) 行列の階数の同等性

- (1) 線形写像 $L: K^n \rightarrow K^m$ の像 $L(K^n) = \text{Im } L$ の次元
- (2) A の線型独立な列ベクトルの最大個数
- (3) A の線型独立な行ベクトルの最大個数
- (4) 基本変形により $A \rightarrow PAQ$ (標準化) としたときの1の数
- (5) A の0でない小行列式の最大次数

証明省略



6. 2. 置換・互換

6. 2. 1. 置換

<置換の定義>

集合 $J_n = \{1, \dots, n\}$ から J_n への全単射

集合 $J_n = \{1, \dots, n\}$ の置換 $\sigma \rightarrow \sigma(1) = p_1, \dots, \sigma(n) = p_n$ とすれば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

1, ..., nの順列

σ によって置換された数の順列

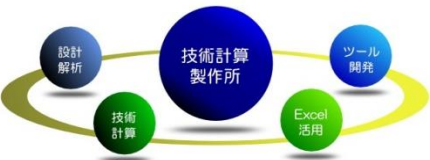
置換の数： $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$ 個

例えば、集合 $J_n = \{1, 2, 3\}$ の二つの置換 σ, σ' について

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすれば、合成写像 $\sigma\sigma'$ は

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma\sigma')(1) = \sigma(\sigma'(1)) = \sigma(2) = 3 \\ (\sigma\sigma')(2) = \sigma(\sigma'(2)) = \sigma(1) = 2 \\ (\sigma\sigma')(3) = \sigma(\sigma'(3)) = \sigma(3) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \sigma\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



6. 2. 置換・互換

6. 2. 2. 互換

<互換の定義>

J_n の二元 i, j ($i \neq j$) を入れ替えて他のすべての元を固定する置換で、 $(i j)$ で表す。

例えば、 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ならば σ は互換で $(1 \ 2)$

互換を τ で表すとき、 $\tau = \tau^{-1}$

J_n の置換すべての集合を S_n とすると、

命題6.2.2-1) 置換の互換による積表現

$n \geq 2$ のとき、 $\forall \sigma \in S_n$ は互換の積 $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_s$

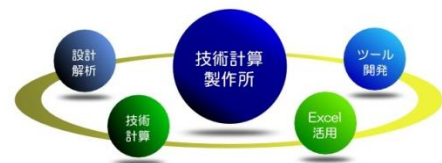
帰納法を用いればよい。証明省略

命題6.2.2-2) 置換の符号

$n \geq 2$ のとき、 $\forall \sigma \in S_n$ に対して $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_s$ ならば r, s はともに偶数または奇数

証明省略

置換 σ に対して符号を次のように定義 $\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +: \sigma \text{が偶数個の互換の積} = \text{偶置換} \\ -: \sigma \text{が奇数個の互換の積} = \text{奇置換} \end{cases}$



6. 2. 置換・互換

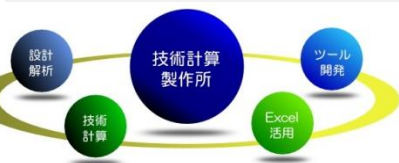
6. 2. 3. 行列式の一意性定理

$$\text{行列式の一意性： } \det A = \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

証明 *****

$$\begin{aligned} \det A &= \det (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \\ &= \det (a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \quad \left(\because \mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n = \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} \mathbf{e}_{k_1} \quad (\mathbf{e}_{k_1} \in K^n) \right) \\ &= a_{11} \det (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) + \cdots + a_{n1} \det (\mathbf{e}_n \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \quad (\because \text{行列式の公理 I } n \text{重線形性による}) \\ &= \sum_{k_1} a_{k_1 1} \det (\mathbf{e}_{k_1} \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} \det (\mathbf{e}_{k_1} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{k_n}) \quad \left[\because \text{行列式の公理 II 交代性により } \mathbf{e}_{k_1} \cdots \mathbf{e}_{k_n} \text{ のうち同じものがあれば} \right. \\ &\quad \left. \det (\mathbf{e}_{k_1} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{k_n}) = 0 \right] \\ &= \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \det (\mathbf{e}_{\sigma(1)} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \quad (\sigma(1)\cdots\sigma(n) \text{ は } 1 \cdots n \text{ の順列で、} \Sigma \text{ は } n! \text{ 個の順列組み合わせの総和}) \\ &= \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \det (\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n) \quad (\because \det (\mathbf{e}_{\sigma(1)} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \det (\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n) = \text{sgn}(\sigma)) \\ &= \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

***** おわり



6. 3. 行列式の存在証明

<行列式の定義>

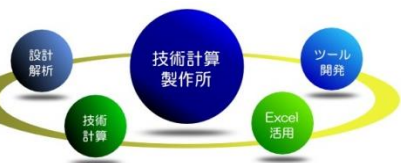
$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

A_{ij} はAから*i*行*j*列を取り除いた*n* - 1次小行列

これが“行列式の公理”を満足すれば“行列式の存在”は証明される

公理 I.	: <i>n</i> 重線形性	} 帰納法により証明
公理 II.	: 交代性	
公理 III.	: 正規化条件	

証明は次頁



6. 3. 行列式の存在証明

行列式の存在証明 *****

$n = 1$ のとき、 $A = (a)$ なので $\det A = a \in K$ であり、公理I, II, IIIを満足するのは自明。

$n = 2$ のとき、 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$ なので $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in K$ であり、公理I, II, IIIを満足するのは自明。

$n - 1$ のとき定義した行列式が公理I, II, III を満足すると仮定する。

i) k 列に関する線形性

$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k \cdots \mathbf{a}_n), B = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_k \cdots \mathbf{a}_n), C = (\mathbf{a}_1 \cdots a\mathbf{a}_k + b\mathbf{b}_k \cdots \mathbf{a}_n)$ とおけば、 A, B, C は k 列以外同じ成分を持つ。

i 行 k 列を除く小行列は $A_{ik} = B_{ik} = C_{ik}$ 、 C の k 列成分は $c_{ik} = aa_{ik} + bb_{ik}$ ゆえ、 $c_{ik} \det C_{ik} = aa_{ik} \det A_{ik} + bb_{ik} \det B_{ik}$

$j \neq k$ の小行列 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} は $n - 1$ 次ゆえ帰納法の仮定から公理Iを満足し、 $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ を考慮して

$$c_{ij} \det (\cdots a\mathbf{a}_k + b\mathbf{b}_k \cdots) = aa_{ij} \det (\cdots \mathbf{a}_k \cdots) + bb_{ij} \det (\cdots \mathbf{b}_k \cdots) \Leftrightarrow c_{ij} \det C_{ij} = aa_{ij} \det A_{ij} + bb_{ij} \det B_{ij}$$

結果、任意の列に対して $c_{ij} \det C_{ij} = aa_{ij} \det A_{ij} + bb_{ij} \det B_{ij}$ が成り立ち

$$\det C = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} c_{ij} \det C_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (aa_{ij} \det A_{ij} + bb_{ij} \det B_{ij}) = a \det A + b \det B$$

ii) 交代性

$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_l (k < l)$ とすれば、 $j \neq k$ かつ $j \neq l$ の小行列 A_{ij} の列ベクトルは線型従属ゆえ $\det A_{ij} = 0$ 。よって、

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} + (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il}$$

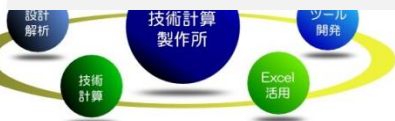
仮定 $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_l$ からその成分も $a_{ik} = a_{il}$ 。ここで k 列を $k + 1$ 列、 $k + 2$ 列、 \cdots 、 $l - 1$ 列と $l - k - 1$ 回交換すれば、 $\det A_{ik} = (-1)^{l-k-1} \det A_{il}$ が得られるので $\det A = 0$

iii) 正規化条件

$A = E$ ならば $a_{ij} = \delta_{ij}$ 。よって、

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{i+k} a_{ii} \det A_{ii} = \det E_{n-1} = 1$$

***** おわり



6. 4. 行列式の計算

<余因子の定義>

集合 $A = (a_{ij})$ の i 行と j 列を除いて得られる $n - 1$ 次行列 A_{ij} の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたもの $\rightarrow \widetilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

命題6.4-1) 余因子による行列式の計算法

$$(1) \det A = a_{1j}\widetilde{A}_{1j} + a_{2j}\widetilde{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{A}_{nj}$$

$$(2) \det A = a_{i1}\widetilde{A}_{i1} + a_{i2}\widetilde{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\widetilde{A}_{in}$$

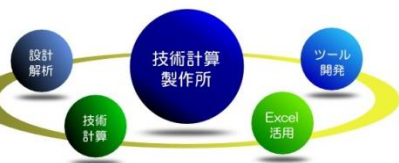
命題6.4-2) 小行列による行列式の計算法

A が r 次、 B が s 次正方行列のとき

$$(1) \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

$$(2) \det \begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

証明省略



6. 4. 行列式の計算

命題6.4-3) 行列式の計算法

A が n 次正方行列、 $A_{11} \cdots A_{kk}$ が正方行列のとき

$$(1) \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det A_{22} \cdots \det A_{kk}$$

$$(2) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$(3) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

証明省略

