6. 行列式

行列式：n次行列を一つの値へ写すもの → $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, n: K) \to c \in K$

行列式の重要性は、行列式の定義式にあるのではなく、その基本的性質が
（1）逆行列の存在判定
（2）連立一次方程式の解法
（3）固有値問題
の理論に用いられることにある。

６．１．行列式の定義

＜行列式の定義＞

関数 $\det: M(n,n:K) \to K$が次の三つの公理（行列式の公理）を満足するもの

$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \boldsymbol{a}_n) \in M(n,n:K), \boldsymbol{a}_j \in K^n, c \in K$に対し、行列$A$の行列式$\det A$とは

公理 I.　：n重線形性

（1）$\det(\cdots\ \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i\ \cdots) = \det(\cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots) + \det(\cdots\ \boldsymbol{b}_i\ \cdots)$

（2）$\det(\cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots) = \det(\cdots c\boldsymbol{a}_i\ \cdots)$

公理 II. ：交代性

Aの二つの列が $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j\ (i \neq j)$ のとき、$\det A = 0$

公理 III.：正規化条件

$\det E = 1$

行列式はこの定義に従うものなら何でも構わないが、実際は**ただ一つ**に決まる

6. 1. 行列式の定義

命題6.1.1-1）行列式の基本変形

（1）Aの二つの列を交換するとき、行列式の符号が変わる

$$\det(\cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots) = -\det(\cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots)$$

（2）Aのある列に他の列のスカラー倍を加えても行列式は不変

$$\det(\cdots\ \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots) = \det(\cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots)$$

命題6.1.1-2）基底変換の基本行列の行列式

$B \in M(n, n: K)$に対して、

（1） $T(i,j)$ 交換 ：$\det BT(i,j) = -\det B$

（2） $M(i:c)$ スカラー倍 ：$\det BM(i:c) = c \det B$

（3） $A(i,j:c)$ 追加 ：$\det BA(i,j:c) = \det B$

命題6.1.1-3）基本行列の行列式の積

$P_1, \cdots, P_k$がすべていずれかの基本行列であるとき、$\det(BP_1 \cdots P_k) = \det B \det P_1 \cdots \det P_k$

命題6.1.1-1～6.1.1-3）証明省略

なお、$B = E$ととれば、$\det T(i,j) = -1$、$\det M(i:c) = c$、$\det A(i,j:c) = 1$

6. 1. 行列式の定義

命題6.1.1-4）行列式の演算

（1）Aが正則なら $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$が正則でないなら $\det A \neq 0$

（2）$\det(AB) = \det A \det B$。特にAが正則なら $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

（3）$\det A = \det A^t$

証明省略

特に（3）によって、行列式の性質について **“列”** に関することは **“行”** に関しても成り立つ。

＜小行列式の定義＞

$A \in M(m, n: K)$から勝手にp個の行と列を取り出して作ったp次正方行列の行列式

命題6.1.1-5）行列式の階数表現

$A \in M(m, n: K)$の階数は、Aの0でない小行列式の最大次数に等しい

証明省略

6．1．行列式の定義

行列Aの階数表現として、以下の五つは同等

命題6.1.1-6）行列の階数の同等性

（1）線形写像$L: K^n \to K^m$の像$L(K^n) = \mathrm{Im}\, L$の次元

（2）Aの線型独立な列ベクトルの最大個数

（3）Aの線型独立な行ベクトルの最大個数

（4）基本変形により$A \to PAQ$（標準化）としたときの1の数

（5）Aの0でない小行列式の最大次数

証明省略

6．2．置換・互換

6．2．1．置換

＜置換の定義＞

集合 $J_n = \{1, \cdots, n\}$ から J_n への全単射

集合 $J_n = \{1, \cdots, n\}$ の置換σ $\rightarrow$ $\sigma(1) = p_1, \cdots, \sigma(n) = p_n$とすれば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$1, \ldots, n$の順列

σによって置換された数の順列

置換の数：$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$個

例えば、集合 $J_n = \{1,2,3\}$ の二つの置換σ, σ'について

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすれば、合成写像$\sigma\sigma'$は

$$\left.\begin{aligned} (\sigma\sigma')(1) &= \sigma(\sigma'(1)) = \sigma(2) = 3 \\ (\sigma\sigma')(2) &= \sigma(\sigma'(2)) = \sigma(1) = 2 \\ (\sigma\sigma')(3) &= \sigma(\sigma'(3)) = \sigma(3) = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \sigma\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 2. 置換・互換

6. 2. 2. 互換

<互換の定義>

J_nの二元i, j（$i \neq j$）を入れ替えて他のすべての元を固定する置換で、$(i\ j)$で表す。

例えば、 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 1 & \boxed{3} \end{pmatrix}$ ならば σ は互換で$(1 \quad 2)$

互換をτで表すとき、$\tau = \tau^{-1}$

J_n の置換すべての集合をSnとするとき、

命題6.2.2-1）置換の互換による積表現

$n \geqq 2$のとき、$\forall \sigma \in Sn$は互換の積$\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_s$

帰納法を用いればよい。証明省略

命題6.2.2-2）置換の符号

$n \geqq 2$のとき、$\forall \sigma \in Sn$に対して$\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_s$ならば$r, s$はともに偶数または奇数

証明省略

置換σに対して符号を次のように定義 $\mathrm{sgn}\,(\sigma) = \begin{cases} +: \sigma\text{が偶数個の互換の積} = \text{偶置換} \\ -: \sigma\text{が奇数個の互換の積} = \text{奇置換} \end{cases}$

6．2．置換・互換

6．2．3．行列式の一意性定理

行列式の一意性： $\det A = \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$

証明　*******************

$$\det A = \det\left(\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_n}\right)$$

$$\left(\because \boldsymbol{a_1} = a_{11}\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e_n} = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\boldsymbol{e_{k_1}} \ \left(e_{k_1} \in K^n\right) \right)$$

$$= \det\left(a_{11}\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e_n} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_n}\right)$$

$$= a_{11}\det\left(\boldsymbol{e_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_n}\right) + \cdots + a_{n1}\det\left(\boldsymbol{e_n} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_n}\right)$$ （∵行列式の公理 I n重線形性による）

$$= \sum_{k_1} a_{k_1 1}\det\left(\boldsymbol{e_{k_1}} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_n}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{k_1,\cdots,k_n} a_{k_1 1}\cdots a_{k_n n}\det\left(\boldsymbol{e_{k_1}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_{k_n}}\right)$$

（∵行列式の公理 II 交代性により $\boldsymbol{e_{k_1}} \cdots \boldsymbol{e_{k_n}}$ のうち同じものがあれば
$\det\left(\boldsymbol{e_{k_1}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_{k_n}}\right) = 0$）

$$= \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\det\left(\boldsymbol{e_{\sigma(1)}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_{\sigma(n)}}\right)$$ （$\sigma(1)\cdots\sigma(n)$は$1\cdots n$の順列で、Σは$n!$個の順列組み合わせの総和）

$$= \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\det\left(\boldsymbol{e_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_n}\right)$$ $\left(\because \det\left(\boldsymbol{e_{\sigma(1)}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_{\sigma(n)}}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma)\det\left(\boldsymbol{e_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_n}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma)\right)$

$$= \sum_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

*******************　おわり

６．３．行列式の存在証明

＜行列式の定義＞

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

A_{ij}はAからi行j列を取り除いた$n-1$次小行列

これが“行列式の公理”を満足すれば“行列式の存在”は証明される

$$\left.\begin{array}{ll} \text{公理 I.} & ：n\text{重線形性} \\ \text{公理 II.} & ：\text{交代性} \\ \text{公理 III.} & ：\text{正規化条件} \end{array}\right\} \text{帰納法により証明}$$

証明は次頁

6．3．行列式の存在証明

行列式の存在証明　********************

$n=1$のとき、$A=(a)$ なので $\det A=a\in K$であり、公理I, II, IIIを満足するのは自明。

$n=2$のとき、$A=(\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2})$ なので $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\in K$であり、公理I, II, IIIを満足するのは自明。

$n-1$のとき定義した行列式が公理I, II, III を満足すると仮定する。

i）k列に関する線形性

$A=(\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_k}\cdots\boldsymbol{a_n}), B=(\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{b_k}\cdots\boldsymbol{a_n}), C=(\boldsymbol{a_1}\cdots a\boldsymbol{a_k}+b\boldsymbol{b_k}\cdots\boldsymbol{a_n})$とおけば、$A,B,C$は$k$列以外同じ成分を持つ。

i行k列を除く小行列は$A_{ik}=B_{ik}=C_{ik}$、Cのk列成分は$c_{ik}=aa_{ik}+bb_{ik}$ゆえ、$c_{ik}\det C_{ik}=aa_{ik}\det A_{ik}+bb_{ik}\det B_{ik}$

$j\neq k$の小行列A_{ij},B_{ij},C_{ij}は$n-1$次ゆえ帰納法の仮定から公理Iを満足し、$a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$を考慮して

$$c_{ij}\det\left(\cdots a\boldsymbol{a_k}+b\boldsymbol{b_k}\cdots\right)=aa_{ij}\det\left(\cdots\boldsymbol{a_k}\cdots\right)+bb_{ij}\det\left(\cdots\boldsymbol{b_k}\cdots\right)\Leftrightarrow c_{ij}\det C_{ij}=aa_{ij}\det A_{ij}+bb_{ij}\det B_{ij}$$

結果、任意の列に対して$c_{ij}\det C_{ij}=aa_{ij}\det A_{ij}+bb_{ij}\det B_{ij}$が成り立ち

$$\det C=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\det C_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(aa_{ij}\det A_{ij}+bb_{ij}\det B_{ij}\right)=a\det A+b\det B$$

ii）交代性

$\boldsymbol{a_k}=\boldsymbol{a_l}(k<l)$とすれば、$j\neq k$かつ$j\neq l$の小行列$A_{ij}$の列ベクトルは線型従属ゆえ$\det A_{ij}=0$。よって、

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=(-1)^{i+k}a_{ik}\det A_{ik}+(-1)^{i+l}a_{il}\det A_{il}$$

仮定$\boldsymbol{a_k}=\boldsymbol{a_l}$からその成分も$a_{ik}=a_{il}$。ここで$k$列を$k+1$列、$k+2$列、…、$l-1$列と$l-k-1$回交換すれば、

$\det A_{ik}=(-1)^{l-k-1}\det A_{il}$が得られるので$\det A=0$

iii）正規化条件

$A=E$ならば$a_{ij}=\delta_{ij}$。よって、

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=(-1)^{i+k}a_{ii}\det A_{ii}=\det E_{n-1}=1$$

********************　おわり

6．4．行列式の計算

＜余因子の定義＞

集合 $A=(a_{ij})$ のi行とj列を除いて得られる$n-1$次行列A_{ij}の行列式に$(-1)^{i+j}$を掛けたもの　→　$\widetilde{A_{ij}}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$

命題6.4-1）余因子による行列式の計算法

（1）$\det A=a_{1j}\widetilde{A_{1j}}+a_{2j}\widetilde{A_{2j}}+\cdots+a_{nj}\widetilde{A_{nj}}$

（2）$\det A=a_{i1}\widetilde{A_{i1}}+a_{i2}\widetilde{A_{i2}}+\cdots+a_{in}\widetilde{A_{in}}$

命題6.4-2）小行列による行列式の計算法

Aがr次、Bがs次正方行列のとき

（1）$\det\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}=\det A\det B$

（2）$\det\begin{pmatrix}A & O\\ D & B\end{pmatrix}=\det A\det B$

証明省略

6．4．行列式の計算

命題6.4-3）行列式の計算法

Aがn次正方行列、$A_{11}\cdots A_{kk}$が正方行列のとき

（1）$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det A_{22} \cdots \det A_{kk}$

（2）$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

（3）$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

証明省略