5．線型代数の具体的表現

5．1．行列空間

5．1．1．座標

＜座標の定義＞

$\forall \boldsymbol{v} \in V$ が基底 $(\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n})$ の線型結合で表せるときの列ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

これ

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n} = (\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_n})\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \quad (x_1, \cdots, x_n \in K)$$

$\Downarrow$

座標 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は基底 $(\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_n})$ に応じて決まる

命題5.1.1-1）座標は基底に対して一意

$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n}$ を表す $x_1, \cdots, x_n \in K$ は一通り。

命題2.5-1）同様$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n} = y_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + y_n\boldsymbol{v_n}$とおけば$x_i = y_i$しかないことが簡単に言える

5. 1. 行列空間

5. 1. 2. 数空間

＜数空間の定義＞

n個のスカラー $x_1, \cdots, x_n \in K$ の順序組である列ベクトル$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$を元に持つ直積空間 K^n

ベクトルには“和”と“スカラー倍”が定義（4.1節）⇒ $\boldsymbol{K^n}$ **は線型空間**

命題5.1.2-1）n次元線形空間とn次元数空間は同型

$$V \cong K^n$$

命題3.4ー1）で証明済み

この列ベクトルは**座標**（前節）であり、単位ベクトル$\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n} \in K^n$の線型結合で表せる

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n} \quad \Leftrightarrow \quad K^n = K\boldsymbol{e_1} + \cdots + K\boldsymbol{e_n}$$

単位ベクトルは線型独立ゆえ $(\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n})$ は K^nの基底

＜自然基底の定義＞

単位ベクトルで構成されるn次元線型空間の基底 $(\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n})$

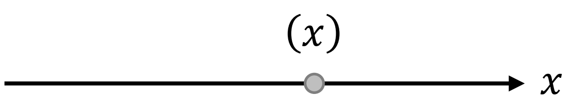
自然基底は標準基底とも呼ぶ

5．1．2．数空間

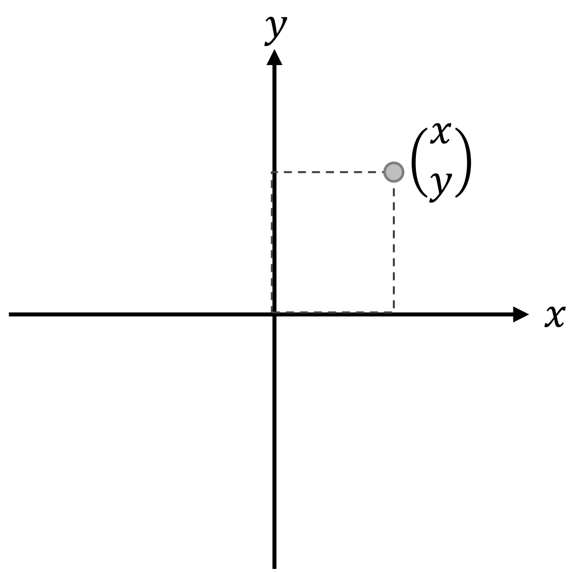
数空間K^nは身近に存在する

数体Kを実数体Rにとると$(x, y, z \in R)$、

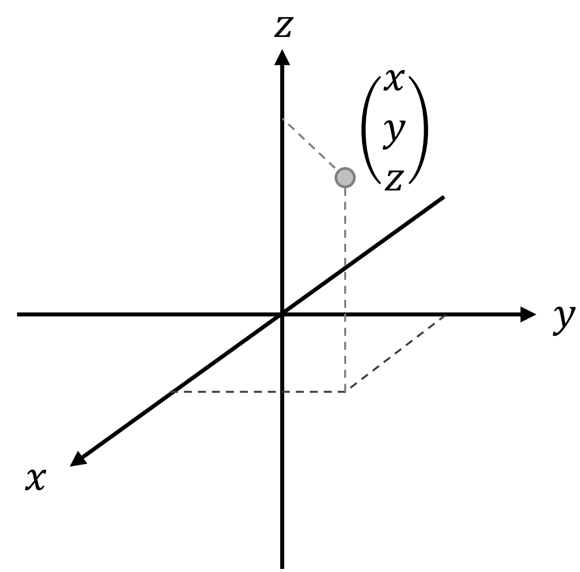
数直線：R^1



二次元平面：R^2



三次元空間：R^3



5．1．行列空間

5．1．3．行列空間

＜行列空間の定義＞

m×n個のスカラーを成分とするm×n行列Aを元に持つ集合 $M(m,n\colon K)$

行列には“和”と“スカラー倍”が定義されている（4.2節）

$\therefore M(m,n\colon K)=$ 線型空間

特に正方行列空間 $M(n,n\colon K)$ は、さらに“積”の演算に関して閉じている

命題5.1.3-1）正方行列の乗法に関する公理

III. 乗法の公理　$\forall A,B\in M(n,n\colon K),\forall c\in K\Rightarrow AB\in M(n,n\colon K)$に対し

（8）結合律　：$(AB)C=A(BC)$

（9）単位元の存在　：$AE=EA=A$ を満たす $E\in M(n,n\colon K)$ が存在

IV. 乗法と加法の関係に関する公理

（10）分配律　：$(A+B)C=AC+BC,\quad A(B+C)=AB+AC$

成分計算するだけなので証明省略

5．2．線型写像の行列表現

5．2．1．表現行列

n次元線型空間Uの基底を$(\boldsymbol{u_1} \ \cdots \ \boldsymbol{u_n})$、$m$次元線型空間$V$の基底を$(\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_m})$、線型写像 $F: U \to V$ とする。

$\boldsymbol{u_1} \ \cdots \ \boldsymbol{u_n}$ のFによる像は $\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_m}$ の線型結合で一意に表せる（∵命題2.5-1）。

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{u_1}) = a_{11}\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{v_m} \\ \cdots \\ F(\boldsymbol{u_n}) = a_{1n}\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{v_m} \end{cases} \quad (a_{ij} \in K)$$

$$\Rightarrow \quad \big(F(\boldsymbol{u_1}) \cdots F(\boldsymbol{u_n})\big) = (\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_m})\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

＜表現行列の定義＞

基底$(\boldsymbol{u_1} \ \cdots \ \boldsymbol{u_n})$、$(\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_m})$に関する$F$の表現行列$A \in M(m, n: K)$

$$\big(F(\boldsymbol{u_1}) \cdots F(\boldsymbol{u_n})\big) = (\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_m})A$$

UからVへの任意の線型写像に対し、$m \times n$表現行列が **“一意”** に決まることを示している

5．2．線型写像の行列表現

5．2．1．表現行列

$\forall A \in M(m,n:K)$ によって定まる写像 $F: U \to V$ について考える。

$$F(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} \quad (\forall \boldsymbol{u} \in U, F(\boldsymbol{u}) \in V)$$

U の基底$(\boldsymbol{u_1} \cdots \boldsymbol{u_n})$の F による像　：$F(\boldsymbol{u_i}) = A\boldsymbol{u_i} \quad (i = 1, \cdots, n)$

$\forall \boldsymbol{u}$は基底$(\boldsymbol{u_1} \cdots \boldsymbol{u_n})$ の線型結合　：$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{u_n} = (\boldsymbol{u_1} \cdots \boldsymbol{u_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$F(x_1\boldsymbol{u_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{u_n}) = F(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} = x_1A\boldsymbol{u_1} + \cdots + x_nA\boldsymbol{u_n} = x_1F(\boldsymbol{u_1}) + \cdots + x_nF(\boldsymbol{u_n})$$

定理3.2-1によって、 $F: U \to V$ は行列Aに対応する**ただ一つの線型写像**

（1）$\forall F \in L(U,V)$に対する表現行列$A \in M(m,n:K)$が一意に決まる
（2） $\forall A \in M(m,n:K)$ に対する線型写像$F \in L(U,V)$が一意に決まる

つまり、線型写像を行列に写す写像 $M: L(U,V) \to M(m,n:K)$ が存在し、

写像 $M: L(U,V) \to M(m,n:K)$ は全単射

この関係は、後の線型写像空間≃行列空間の証明に必要となる

5. 2. 線型写像の行列表現

5. 2. 1. 表現行列

$U = K^n, V = K^m$ とし、自然基底$(\boldsymbol{e}^{(n)}{}_1 \cdots \boldsymbol{e}^{(n)}{}_n), (\boldsymbol{e}^{(m)}{}_1 \cdots \boldsymbol{e}^{(m)}{}_m)$ をとれば、$\forall \boldsymbol{x} \in K^n, \forall \boldsymbol{y} \in K^m$ は座標そのもの

$$(\boldsymbol{e}^{(n)}{}_1 \cdots \boldsymbol{e}^{(n)}{}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{e}^{(m)}{}_1 \cdots \boldsymbol{e}^{(m)}{}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$\forall A \in M(m, n\colon K)$ を表現行列とする線型写像 $L\colon K^n \to K^m$ について、

行列 A の列ベクトル表現　：$(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$　$(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n \in K^m)$

表現行列の定義　：$\left(L(\boldsymbol{e}^{(n)}{}_1) \cdots L(\boldsymbol{e}^{(n)}{}_n)\right) = (\boldsymbol{e}^{(m)}{}_1 \cdots \boldsymbol{e}^{(m)}{}_m)A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}^{(m)}{}_1 \cdots \boldsymbol{e}^{(m)}{}_m)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(L(\boldsymbol{e}^{(n)}{}_1) \cdots L(\boldsymbol{e}^{(n)}{}_n)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L(\boldsymbol{x})$$

$L(\boldsymbol{x}) \in K^m$ であるから $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ とおいて $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$

（1）線型写像$L\colon K^n \to K^m$は$\forall A \in M(m, n\colon K)$を座標の左から乗ずることによって得られる。
（2） K^nのLによる像$L(K^n)$はAの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n$ で生成される。
（3）写像$M\colon L(K^n, K^m) \to M(m, n\colon K)$は全単射（前頁による）

5. 2. 線型写像の行列表現

5. 2. 2. 線型写像空間から行列空間への写像

線型写像空間 $L(U,V)$ と行列空間 $M(m,n:K)$ には写像$M: L(U,V) \to M(m,n:K)$が存在

$F \in L(U,V), A \in M(m,n:K)$に対し、$A = M(F)$

命題5.2.2-1）線形写像空間と行列空間は同型

$M: L(U,V) \to M(m,n:K)$ は同型写像、つまり $L(U,V) \cong M(m,n:K)$

証明　********************

5.2.1節で示したように、 $M: L(U,V) \to M(m,n:K)$は全単射である。

さらに、写像Mが線型写像となることは$\forall F,G \in L(U,V)$に対して加法、スカラー倍の計算を実際に行えばよい。

加法については、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_m)M(F+G) &= \big((F+G)(\boldsymbol{u}_1) \ \cdots (F+G)(\boldsymbol{u}_n)\big) \\
&= \big(F(\boldsymbol{u}_1) + G(\boldsymbol{u}_1) \ \cdots \ F(\boldsymbol{u}_n) + G(\boldsymbol{u}_n)\big) \\
&= \big(F(\boldsymbol{u}_1) \ \cdots \ F(\boldsymbol{u}_n)\big) + \big(G(\boldsymbol{u}_1) \ \cdots \ G(\boldsymbol{u}_n)\big) \\
&= (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m)M(F) + (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m)M(G) \\
&= (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m)\big(M(F) + M(G)\big)
\end{aligned}
$$

スカラー倍も同様に計算して $(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_m)M(cF) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_m)cM(F)$ となることが確かめられる。

********************　おわり

5. 2. 線型写像の行列表現

5. 2. 2. 線型写像空間から行列空間への写像

$$F(U,V) \cong M(m,n:K) \quad \wedge \quad L(K^n,K^m) \cong M(m,n:K)$$

$\Downarrow$

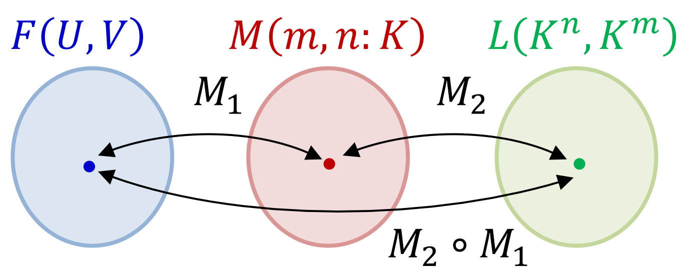
$M_1: F(U,V) \to M(m,n:K)$ と $M_2: M(m,n:K) \to L(K^n,K^m)$ はともに同型写像
つまりともに全単射

$\Downarrow$

定理3.1.4-1により、合成写像 $M_2 \circ M_1$ もまた全単射≡同型写像

$\Downarrow$

従って、$F(U,V) \cong L(K^n,K^m)$



$A \in M(m,n:K)$ を表現行列とする線形写像 $L: K^n \to K^m$ をとして一般性を失わない

5．2．線型写像の行列表現

5．2．3．行列の階数

$A \in M(m, n: K)$ を表現行列とする線形写像を $L: K^m \to K^n$ とすれば

（線形写像 $L: K^m \to K^n$ として一般性を損なわない ⇒ 5.2.2節参照）

$$\mathrm{rank}\, L = \text{「} K^m \text{の} L \text{による像} \mathrm{Im}\, L \text{の次元」} = \text{「} \mathrm{Im}\, L \text{ の基底を構成する元の数」}$$

5.2.1節により、$\forall L(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, L$ はAの列ベクトルの線型結合で表せる

$$L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\, L = K\boldsymbol{a_1} + \cdots + K\boldsymbol{a_n}$$

従って、

「$\mathrm{Im}\, L$ の次元」 = 「$\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_n}$の中の線型独立なものの数」

つまり、

＜行列の階数の定義＞

行列Aの階数 = 線型写像Lの階数　：$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, L$

5．2．線型写像の行列表現

5．2．3．行列の階数

＜列階数の定義＞

m×n行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ $(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \in K^m)$の列ベクトルのうち、線型独立なものの最大個数

＜行階数の定義＞

m×n行列 $A = \left(\boldsymbol{a}^1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}^m\right)^t$ $\left(\boldsymbol{a}^1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}^m \in K^{1\times n}\right)$の行ベクトルのうち、線型独立なものの最大個数

定理5.2.3-1）列階数 = 行階数

証明　＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

$A \in M(m,n\!:K)$を表現行列とする線形写像を$L\!: K^n \to K^m$とし、Aの列階数をr、行階数をsとする。

$A = \left(\boldsymbol{a}^1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}^m\right)^t$に対し$\boldsymbol{a}^1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}^s$は線型独立（行階数$s \leqq m$）。よって$\boldsymbol{a}^k (s < k \leqq m)$は$\boldsymbol{a}^1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}^s$の線型結合である。

$\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{x} = 0 \ \cdots \boldsymbol{a}^s\boldsymbol{x} = 0$を満たす $\boldsymbol{x} \in K^n$は$\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$であり、$\boldsymbol{x}$の集合はLの核 $\mathrm{Ker}\, L$ 。それに対し $A' = \left(\boldsymbol{a}^1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}^s\right)^t$、それを表現行列とする$L'\!: K^n \to K^s$をとれば、同様に$L'(\boldsymbol{x}) = A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$となり $\mathrm{Ker}\, L = \mathrm{Ker}\, L'$ 。A'の列階数を$r'(\leqq s)$として$\dim(\mathrm{Ker}\, L') = n - r'$。 $\dim(\mathrm{Ker}\, L) = n - r$であるから$r = r' \leqq s$。

Aの転置行列A^tに対し同様の操作を行えば$s \leqq r$が得られる。結果$(r \leqq s) \wedge (s \leqq r) \Rightarrow r = s$。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊　おわり

5．2．4．線型変換の行列表現

5.2.2節で見た内容に対し、

線型写像空間： $L(V, V)$、正方行列空間： $M(n, n: K)$

とすることで、写像 $M: L(V, V) \to M(n, n: K)$ 、つまり$M(T) = A \in M(n, n: K)$が得られる。

$$\left(T(\boldsymbol{v_1}) \ \cdots \ T(\boldsymbol{v_n})\right) = (\boldsymbol{v'_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v'_n})A$$

＜線型変換と正方行列の関係＞

（1）Mは同型写像　⇔　$L(V, V) \cong M(n, n: K)$　（∵命題5.2.2-1）

（2）$L(V, V), M(n, n: K)$ともに積の演算に関して閉じている（3.3節 / 5.1.3節）

線型変換空間$L(V, V)$と正方行列空間$M(n, n: K)$は同じ代数的構造を持つ

つまり、写像Mはこの代数的構造を保存する

5. 3. 基底変換

5. 3. 1. 基底変換と座標変換

＜基底変換の定義＞

Vの基底 $(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)$ を、Vの別の基底 $(\boldsymbol{v'}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v'}_n)$ に置き換える

線型空間Vには無数の基底が存在 → 適当な基底を選ぶことで線型空間の構造について見通しがよくなる

Vの2つの基底の間にある関係式

$$\begin{cases} \boldsymbol{v'}_1 = t_{11}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_{n1}\boldsymbol{v}_n \\ \cdots \\ \boldsymbol{v'}_n = t_{1n}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{v}_n \end{cases} \quad (t_{ij} \in K)$$

同じ式

＜基底変換行列の定義＞

$(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n), (\boldsymbol{v'}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v'}_n)$が$V$の基底で、下記式を満足する正方行列$T$

$$(\boldsymbol{v'}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v'}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)T \quad T \in M(n, n: K)$$

命題5.3.1-1）基底変換行列の正則性

基底変換行列 T は正則

$(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n), (\boldsymbol{v'}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v'}_n)$を入れ替えるだけなので証明省略

5. 3. 基底変換

5. 3. 1. 基底変換と座標変換

$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n), (\boldsymbol{v}'_1 \cdots \boldsymbol{v}'_n)$ をVの基底とするとき、

$$\forall \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}'_1 \cdots \boldsymbol{v}'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$ （5.1.1参照）

基底変換Tによって、$\forall \boldsymbol{v} \in V$の座標は変化する

$$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$ 基底変換 T は正則ゆえ $$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

“（新基底）＝（旧基底）T” に対し “（新座標）＝（旧座標）T^{-1}”

座標変換 ＝ 基底変換の逆変換

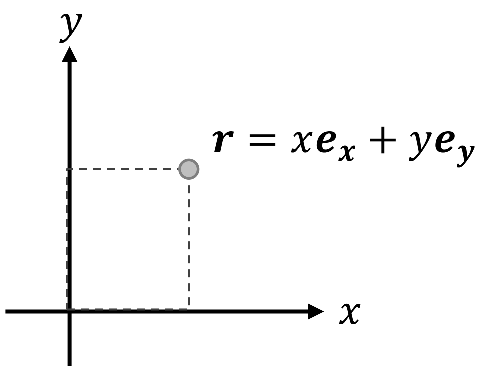
5．3．基底変換

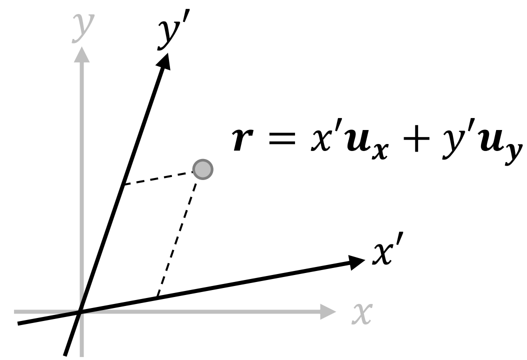
5．3．1．基底変換と座標変換

二次元平面R^2を例にとると、

基底：$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

基底：$\boldsymbol{u}_x = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$





このとき基底変換行列T：$(\boldsymbol{u}_x \boldsymbol{u}_y) = (\boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_y)T \;\Leftrightarrow\; T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

座標間の関係：$(\boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_x \boldsymbol{u}_y)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_y)T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x/4 - y/4 \\ -y/4 + \sqrt{3}x/4 \end{pmatrix}$$

5．3．基底変換

5．3．2．基本基底変換

$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)$ をVの基底とするとき、

（1）$\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ を入れ替え$(i \neq j)$　：$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_j \cdots \boldsymbol{v}_i \cdots \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_i \cdots \boldsymbol{v}_j \cdots \boldsymbol{v}_n)T(i,j)$

（2）$\boldsymbol{v}_i$ を $c\boldsymbol{v}_i$ で置き換え$(c \neq 0)$　：$(\boldsymbol{v}_1 \cdots c\boldsymbol{v}_i \cdots \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_i \cdots \boldsymbol{v}_n)M(i:c)$

（3）$\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{v}_i + c\boldsymbol{v}_j$ で置き換え　：$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_i + c\boldsymbol{v}_j \cdots \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)A(i,j:c)$

$$
T(i,j) = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & & i\text{列} & & & & j\text{列} & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad
M(i:c) = \begin{pmatrix}
1 & & \vdots & & O \\
 & \ddots & & & \\
\cdots & & c & & \cdots \\
 & & & \ddots & \\
O & & \vdots & & 1
\end{pmatrix}
\quad
A(i,j:c) = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i\text{列} & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & \vdots & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & \vdots & \ddots & & & \\
 & & c & \cdots & 1 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

空白部は“O”

これらが**“正則”**　であることは、計算することで即座に確かめられる

5．3．3．行列の基本変形

基底変換 $(\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n}) = (\boldsymbol{e_1} \cdots \boldsymbol{e_n})A$ は $A = (\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_n}) \in M(m,n:k)$ であるから、

例えば$(\boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_j} \cdots \boldsymbol{v_i} \cdots \boldsymbol{v_n}) = AT(i,j) \quad \Rightarrow \quad$ 行列Aの2つの列を入れ替え

行列の基本変形

$\forall A \in M(m,n:k)$に対し、

基本行列：P	行変換：PA	列変換：AP
$T(i,j)$	2つの行を入れ替え	2つの列を入れ替え
$M(i:c)$	i行をc倍	j列をc倍
$A(i,j:c)$	j行をc倍してi行に加える	j列をc倍してi列に加える

5．3．基底変換

5．3．3．行列の基本変形

命題5.3.3-1）基本変形の繰り返し

$A \in M(m,n:K)$に対し

（1）Aの第j列が$\boldsymbol{a_j} \neq \boldsymbol{o}\left(\boldsymbol{a_j} \in K^m\right)$ならば、有限個の適当な基本行列$P_1 \cdots P_k$を$A$の右から乗じて第$j$列が単位ベクトル$\boldsymbol{e_j}$とできる

（2）Aの第i行が$\boldsymbol{a^i} \neq \boldsymbol{o}\left(\boldsymbol{a^i} \in K^{1\times n}\right)$ならば、有限個の適当な基本行列$P_1 \cdots P_k$を$A$の左から乗じて第$i$行が単位ベクトル$\boldsymbol{e^i}$とできる

証明　********************

（1）が証明できれば、同様に左から基本行列を乗じて（2）を証明すればよい。

（Step1）対角要素$a_{jj} \neq 0$となるよう行列Aを$T(i,j)$により変形する（ $a_{jj} \neq 0$ならこの操作はスキップ）。

$\boldsymbol{a_j} \neq \boldsymbol{o}$ なので少なくとも1つの成分は0ではない。 そこで $a_{jj} = 0$ なら $a_{ij} \neq 0$ となるi行とj行を$P_1 = T(i,j)$として$P_1 A$により入れ替える。

（Step2）対角要素$a_{jj} = 1$となるよう行列$P_1 A$を$M(i:c)$により変形する。

$a_{ij} \neq 0$ なのでj行を$c = 1/a_{ij}$ として$P_2 = M(j:c)$ を$P_1 A$ に左から乗ずる($P_2 P_1 A$)。

（Step3）非対角要素$a_{ij} = 0$となるよう行列$P_2 P_1 A$を$A(i,j:c)$により変形する。

$i \neq j$行に対して、i行にj行のa_{ij}倍を加えることで(i,j)成分は $a_{ij} - 1a_{ij} = 0$ と出来る。これを$a_{ij} \neq 0$の成分に対して最大でも$m-1$回の繰り返し操作を行う。これは$P_k = A(i,j:c)$として、$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$

******************** おわり

5．4．線型写像の標準形

線型写像$F: U \to V$の表現行列は、U, Vの基底を取り換えるとどう変わるか？

（Step1）Uの二つの基底$(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n), (\boldsymbol{u'}_1 \cdots \boldsymbol{u'}_n)$の関係

基底変換行列$P \in M(n, n: K)$として、$(\boldsymbol{u'}_1 \cdots \boldsymbol{u'}_n) = (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)P \quad \cdots (1)$

（Step2）Vの二つの基底$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m), (\boldsymbol{v'}_1 \cdots \boldsymbol{v'}_m)$の関係

基底変換行列Q $\in M(m, m: K)$として、$(\boldsymbol{v'}_1 \cdots \boldsymbol{v'}_m) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m)Q \quad \cdots (2)$

（Step3）$F: U \to V$のそれぞれの基底に対する表現行列を$M(F), M'(F)$とする

$$\big(F(\boldsymbol{u}_1) \cdots F(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m)M(F) \quad \cdots (3)$$

$$\big(F(\boldsymbol{u'}_1) \cdots F(\boldsymbol{u'}_n)\big) = (\boldsymbol{v'}_1 \cdots \boldsymbol{v'}_m)M'(F) \quad \cdots (4)$$

（Step4）$\big(F(\boldsymbol{u'}_1) \cdots F(\boldsymbol{u'}_n)\big) = \cdots$(成分計算する)$\cdots = \big(F(\boldsymbol{u}_1) \cdots F(\boldsymbol{u}_n)\big)P \quad \cdots (5)$

（Step5）（4）式の変形から入り、基底変換行列が正則であることを考慮する

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v'}_1 \cdots \boldsymbol{v'}_m)M'(F) &= \big(F(\boldsymbol{u'}_1) \cdots F(\boldsymbol{u'}_n)\big) \\ &= \big(F(\boldsymbol{u}_1) \cdots F(\boldsymbol{u}_n)\big)P \quad (\because (5)) \\ &= (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m)M(F)P \quad (\because (3)) \\ &= (\boldsymbol{v'}_1 \cdots \boldsymbol{v'}_m)Q^{-1}M(F)P \quad (\because (2))\end{aligned}$$

$$M'(F) = Q^{-1}M(F)P$$

5．4．線型写像の標準形

どんな線形写像Fも、その表現行列Aを**“極めて簡単な形”**に変形できる。

線型写像の標準形

＜線形写像の標準形の定義＞

線型写像の標準形：$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$

命題5.4.1-1）線形写像の標準形

Uの基底とVの基底を適当に選べば、線型写像$F: U \to V$の表現行列は標準形で表せる

証明　********************

$\forall A \in M(m, n: K)$を表現行列とする線型写像$F: U \to V$を定めることができる（5.2.1節）$(\dim U = n, \dim V = m)$。
そこで次元定理の証明（定理3.5-1）から、$\mathrm{Ker}\, F$の基底を$(\boldsymbol{u}_{r+1} \cdots \boldsymbol{u}_n)$、$U$の基底を$(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_r\ \boldsymbol{u}_{r+1} \cdots \boldsymbol{u}_n)$（基底の延長定理）とでき、基底の延長部分の像$(F(\boldsymbol{u}_1) \cdots F(\boldsymbol{u}_r))$が $F(U)$ の基底になる（命題3.4-1の証明による）。
$\dim U = \dim \mathrm{Ker}\, F + \dim F(U)$であるから $F(U) \subseteq V$ゆえ$F(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1 \cdots, F(\boldsymbol{u}_r) = \boldsymbol{v}_r (r \leqq m)$とでき、$V$の基底は$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_r\ \boldsymbol{v}_{r+1} \cdots \boldsymbol{v}_m)$に延長できる。核の定義から$F(\boldsymbol{u}_{r+1}) = \boldsymbol{o} \cdots, F(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{o}$であり

$$\left(F(\boldsymbol{u}_1) \cdots F(\boldsymbol{u}_r)\ F(\boldsymbol{u}_{r+1}) \cdots F(\boldsymbol{u}_n)\right) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_r\ \boldsymbol{v}_{r+1} \cdots \boldsymbol{v}_m) \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

の関係が得られる。つまり、基底を適当に選ぶことでAを標準形で表せることになる。

********************　おわり

5．5．連立一次方程式

5．5．1．連立一次方程式の行列表現

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

項目	行列表現	成分
左辺の係数	係数行列$A \in K^{m \times n}$	$a_{ij}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$
左辺の変数	変数ベクトル$\boldsymbol{x} \in K^n$	$x_i(1 \leq i \leq n)$
右辺の定数項	定数ベクトル$\boldsymbol{b} \in K^m$	$b_i(1 \leq i \leq m)$

特に、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$：**同次方程式**、$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$：**非同次方程式**

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**解** $\Rightarrow$ $A\boldsymbol{x_o} = \boldsymbol{b}$ を満たす$\boldsymbol{x_o} \in K^n$

解全体のなす集合 $\Rightarrow$ **一般解**

5．5．連立一次方程式

5．5．2．解の構造定理

係数行列$A \in M(m,n:K)$によって定まる線形写像を $L: K^n \to K^m$ とすると（5.2.2節参照）、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

命題5.5.2-1）同次方程式の一般解

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$の一般解$L^{-1}(\boldsymbol{o}) \subseteq K^n \quad \Rightarrow \quad \dim L^{-1}(\boldsymbol{o}) = n - \operatorname{rank} A$

次元定理（定理3.5-1）の証明そのもの

命題5.5.2-2）連立一次方程式が解を持つ条件

非同次方程式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$が少なくとも一つ解を持つ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = \operatorname{rank} A$

ここで、 $\operatorname{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = \dim(K\boldsymbol{a_1} + \cdots + K\boldsymbol{a_n} + K\boldsymbol{b})$

$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n}$を満たす$x_1 \cdots x_n$が存在するので$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_n}$は線型従属$\Rightarrow K\boldsymbol{a_1} + \cdots + K\boldsymbol{a_n} = K\boldsymbol{a_1} + \cdots + K\boldsymbol{a_n} + K\boldsymbol{b}$

命題5.5.2-3）連立一次方程式の解の構造

連立一次方程式が解を持つとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の一つの任意解（特殊解）$\boldsymbol{x_o}$を用いて

$$(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\text{の一般解}) = \boldsymbol{x_o} + (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\text{の一般解})$$

命題3.5-2の証明そのもの

5．5．連立一次方程式

5．5．2．解の構造定理

（1）同次方程式の解

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$の一般解$L^{-1}(\boldsymbol{o})$の基底$(\boldsymbol{x_{r+1}} \cdots \boldsymbol{x_n})$ $\Rightarrow$ $L^{-1}(\boldsymbol{o}) = \{c_{r+1}\boldsymbol{x_{r+1}} + \cdots + c_n\boldsymbol{x_n} | c_{r+1} \cdots c_n \in K\}$

一組の線型独立解$\boldsymbol{x_{r+1}} \cdots \boldsymbol{x_n} \in L^{-1}(\boldsymbol{o})$を求めればよい

（2）非同次方程式の解

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の一つの解$\boldsymbol{x_o}$が何らかの方法で定まるとき、

一般解：$L^{-1}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x_o} + L^{-1}(\boldsymbol{o})$

a） $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$の一組の線型独立解$\boldsymbol{x_{r+1}} \cdots \boldsymbol{x_n} \in L^{-1}(\boldsymbol{o})$を求める
b） $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の一つの解$\boldsymbol{x_o}$を求める

5．5．3．連立一次方程式の解法

連立一次方程式$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$を解くには、係数行列$A$が **“単純化”** できれば簡単に解きやすくなる

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots \\
a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \\
a_{r+1,1}x_1 + \cdots + a_{r+1,n}x_n = b_{r+1} \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x'_1 + c_{11}x'_{r+1} + \cdots + c_{1,n-r}x_n = d_1 \\
x'_2 + c_{21}x'_{r+1} + \cdots + c_{2,n-r}x_n = d_2 \\
\cdots \\
x'_r + c_{r1}x'_{r+1} + \cdots + c_{r,n-r}x'_n = d_r \\
0 = d_{r+1} \\
\cdots \\
0 = d_m
\end{cases}
$$

つまり

$$
A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_r & C_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}
$$

（1）$d_{r+1},\cdots,d_m$の中に“0”でないものがあれば$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$は解を持たない

（2）$x'_{r+1},\cdots,x'_n$の値を任意に$t_1,\cdots,t_{n-r}$と定めて$x'_1,\cdots,x'_r$を上右式より求め、$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{x}'$によって$\boldsymbol{x}$の解が定まる

5．5．3．連立一次方程式の解法

Aの単純化　→　行列の基本変形を利用

行基本変形行列P、列の入れ替え操作行列Qとして、$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & C_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad PAQ(Q^{-1}\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad PAQ\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{d}$$

係数行列Aを**単純化**して、$PAQ\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{d}$から$\boldsymbol{x}'$を定めれば、$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{x}'$から$\boldsymbol{x}$が定まる

命題5.5.3-1）係数行列の単純化

$A\in M(m,n:K)$に“**行基本変形**”と“**列の入れ替え**”操作を有限回行うことで、

$$A \quad \to \quad \begin{pmatrix} E_r & C_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \quad r=\mathrm{rank}\,A\geqq 0$$

証明は次頁

5．5．3．連立一次方程式の解法

証明　*******************

（Step1）1列目が$(1\ 0 \cdots 0)^t$（単位ベクトル）となるよう行列Aを変形する　→　このとき得られる行列を$A^{(1)}$とする。

（1）$a_{11}=0$ なら $a_{ij} \neq 0$ であるi行j列成分をa_{11}と入れ替え、これを${a_{11}}^{(1)}$とする。さらに$a_{11}=1$となるよう1行目を$1/{a_{11}}^{(1)}$する。このとき得られた行列を$A'^{(1)}=M\left(1{:}\,1/{a_{11}}^{(1)}\right)T(i,1)AT(j,1)$とする。

（2）1列目2～m行目の成分がすべて“0”になるよう$A(i,1{:}-a_{i1})$を$A'^{(1)}$に左から乗ずる。

$$\text{STEP1の操作：}\ A^{(1)}=A(2,1{:}-a_{21})\cdots A(m,1{:}-a_{m1})M\left(1{:}\,1/{a_{11}}^{(1)}\right)T(i,1)AT(j,1)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & C_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

（操作不要な箇所は単位行列Eに置き換える）

$B_1=0$ならrank A = rank $A^{(1)}=1$となり証明完了。

（Step2）2列目が$(0\ 1\ 0 \cdots 0)^t$となるよう行列Aを変形する　→　このとき得られる行列を$A^{(2)}$とする。

（1）$a_{22}=0$ なら $a_{ij} \neq 0$ であるi行j列成分をa_{22}と入れ替え、これを${a_{22}}^{(2)}$とする。さらに$a_{22}=1$となるよう2行目を$1/{a_{22}}^{(2)}$する。このとき得られた行列を$A'^{(2)}=M\left(1{:}\,1/{a_{22}}^{(2)}\right)T(i,2)A^{(1)}T(j,2)$とする。

（2）2列目1,3～m行目の成分がすべて“0”になるよう$A(i,2{:}-a_{i2})$を$A'^{(2)}$に左から乗ずる。

$$\text{STEP2の操作：}\ A^{(2)}=A(1,2{:}-a_{12})\cdots A(m,2{:}-a_{m2})M\left(1{:}\,1/{a_{22}}^{(2)}\right)T(i,2)A^{(1)}T(j,2)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & \\ \hline \vdots & \vdots & B_2 \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

（操作不要な箇所は単位行列Eに置き換える）

$B_2=0$ならrank A = rank $A^{(2)}=2$となり証明完了。

以降3列目、4列目…が単位ベクトルとなるよう繰り返し操作を行えばよい。

*******************　おわり

5．5．連立一次方程式

5．5．4．逆行列の計算

命題5.5.4-1）逆行列の計算

n次正方行列Aが正則のとき、有限個の基本行列を用いて次式が得られる。

$$P_k \cdots P_2 P_1 A = E \quad \text{または} \quad P_k \cdots P_2 P_1 = A^{-1}$$

証明　********************

基本的な操作は命題5.5.3-1）係数行列の単純化と同じ。

正則行列Aを列ベクトル$A = (\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_n})$により表す。正則ゆえ$\boldsymbol{a_i} \neq \boldsymbol{o}$

（Step1）A の1列目を基本変形行列P_1を用いて$(1\ 0 \cdots 0)^t \in K^n$に変形すると、$n-1$次の正則行列 B_1が得られる。

$$P_1 A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & C_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

（Step2）B_1 の1列目（Aの2列目）を基本変形行列P'_2を用いて$(1\ 0 \cdots 0)^t \in K^{n-1}$に変形すると、$n$ −2次の正則行列 B'_2が得られる。さらに、Aの2列目第一行成分が0になるよう 基本行列$A(1{,}2{:}-c)$を左から乗ずる。このとき、$P_1 A$の第一列は影響を受けない。

$$P'_2 P_1 A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & C'_2 \\ 0 & 1 & \\ \hline \vdots & \vdots & B'_2 \\ 0 & 0 & \end{array}\right) \to A(1{,}2{:}-c) P'_2 P_1 A = P_2 P_1 A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & \\ \hline \vdots & \vdots & B_2 \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Step2の手順を最大$n-1$回繰り返せば命題の結果が得られる。

********************　おわり