～～～　線型代数の具体的表現　～～～

4. ベクトル・行列

4. 1. ベクトル

＜ベクトルの定義＞

複数の数 $x_1, \cdots, x_n$ を順序付けて並べた順序組

列ベクトル：$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 行ベクトル：$\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots x_n)$

また、$x_1, \cdots, x_n$ をベクトルの**成分**と呼ぶ

特に指定がない限り“ベクトル = 列ベクトル”

特別なベクトルとして、

零ベクトル ：$\boldsymbol{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

単位ベクトル ：$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 1. ベクトル

＜ベクトルの演算の定義＞

（1）ベクトルの和 $:\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

（2）ベクトルのスカラー倍 $:c\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$

ベクトルの和が実行可能な条件 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の成分の数が一致

2つのベクトル$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$が等しい $\Leftrightarrow$ すべての成分が一致

任意のベクトルは単位ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{e_1}+\cdots+x_n\boldsymbol{e_n}$$

4. 2. 行列

＜行列の定義＞

$m\times n$個の数 a_{ij} をm行n列の形に並べたもの ⇒ (m,n)行列 または $m\times n$行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{1\le i\le m,1\le j\le n}=\left(a_{ij}\right)$$

また、 a_{ij} を行列の成分と呼ぶ。

特別な行列として、

零行列 ：$O=$（すべての成分が0）

複素共役行列 ：$A=\left(a_{ij}\right)$に対し$\bar{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)$ $\left(\overline{a+ib}=a-ib,a,b\in R\right)$

複素共役行列については下記が成り立つ。

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$$
$$\overline{cA}=\bar{c}\bar{A}$$
$$\bar{\bar{A}}=A$$

4. 2. 行列

＜行列の演算の定義＞

（1）行列の和 $\quad : A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

（2）行列のスカラー倍 $\quad : cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$

行列の和が実行可能な条件 ⇒ AとBの型（行列数）が一致

2つの行列A, Bが等しい ⇔ すべての成分が一致：$(a_{ij})=(b_{ij})$

行列はベクトルを用いても表現でき、

行ベクトル $\boldsymbol{a_i}=(a_{i1}\ \cdots\ a_{in})$ を用いて $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^m \end{pmatrix}$

列ベクトル $\boldsymbol{a_j}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ を用いて $A=(\boldsymbol{a_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})$

前節の列ベクトルはn×1行列、行ベクトルは1×n行列でもある

4．3．行列の積

＜行列の積の定義＞

m×p行列Aとp×n行列Bに対して次式で定義される

$$
A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}
$$

行列の積が実行可能な条件　⇒　Aの列数とBの行数が一致（上記p）

4．3．行列の積

行ベクトル（1×p行列）と列ベクトル（p×1行列）の積 = 内積

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1} = \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{i1}$$

内積を使って行列の積の各成分を表現すると

$$A \times B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}^1\cdot\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}^m\cdot\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}^m\cdot\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

命題4.3-1）行列の積の演算律

（1）結合律　：$(AB)C = A(BC)$

（2）単位元　：$AE = EA = A$となる単位元Eが存在

（3）零元　：$AO = OA = O$となる零元Oが存在

（4）分配律　：$(A+B)C = AC + BC,\quad A(B+C) = AB + AC$

交換律：$AB = BA$は必ずしも成立しない

証明省略

4．4．行列の操作

4．4．1．転置行列

転置とは、**行と列を入れ替える**こと

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{の転置行列} \quad \Rightarrow \quad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

命題4.4.1-1）転置行列の演算法則

（1）$(A+B)^t=A^t+B^t$

（2）$(cA)^t=cA^t$

（3）$(A^t)^t=A$

（4）$(AB)^t=B^tA^t$

証明省略

4．4．2．行列の区分け

行列の区分けとは
行列の行および列の間にいくつかの区分け線を入れて全体を複数の行列に分割すること

$$\left(\begin{array}{cc|c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

このとき、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}、A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}、A_{13} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}、A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}、A_{23} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}、A_{32} = \begin{pmatrix} a_{43} \end{pmatrix}、A_{33} = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix}$$

行列の区分けの目的は、行列の演算を小行列単位で行うことで少しでもやりやすくすること

4．5．正方行列

＜正方行列の定義＞

行数と列数が同じ数の行列（$n \times n$行列）

正方行列Aに対し、

非対角成分

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

非対角成分

対角成分 $(i = j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角行列

対角成分より下の成分がすべて0

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角行列

対角成分より上の成分がすべて0

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

対角行列

非対角成分がすべて0

対角行列の対角成分がすべて“1”の行列

単位行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

$$\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}\right)$$

対称行列　：AとAの転置行列が等しい　$A^t = A \iff a_{ji} = a_{ij}$

交代行列　：$-A$とAの転置行列が等しい　$A^t = -A \iff a_{ji} = -a_{ij}$

4. 5. 正方行列

＜逆行列の定義＞
n次正方行列 A^{-1} が A に対して $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{E}$ を満たすもの

命題4.5-1）逆行列の一意性
逆行列が存在するとき、ただ一つに決まる。

命題4.5-2）逆行列の逆行列
正方行列Aが正則なとき、$(A^{-1})^{-1} = A$

命題4.5-3）転置行列の正則性
正方行列Aが正則なとき、転置行列A^tも正則で、その逆行列は$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

命題4.5-4）正則行列の積の正則性
正方行列A, Bが正則なとき、ABも正則で、その逆行列は$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

命題4.5-1～4.5-4証明省略

4．5．正方行列

正方行列Aの積は型を変えない（n行n列を維持）

命題4.5-5）正方行列の指数則

（1）$A^k A^l = A^{k+l}$

（2）$\left(A^k\right)^l = A^{kl}$

（3）$AB = BA \quad \Rightarrow \quad (AB)^k = A^k B^k$

証明省略

多項式 $f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n \in K[t]$ に対して

$$f(A) = c_0 E + c_1 A + \cdots + c_n A^n \in M(n, n: K)$$

を定義すると、

命題4.5-6）正方行列の多項式

$\varphi, \psi \in K[t], a \in K$に対し、

（1）$(\varphi + \psi)(A) = \varphi(A) + \psi(A), \quad (a\varphi)(A) = a\varphi(A)$

（2）$(\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)$

（3）$P \in M(n, n: K)$が正則のとき、$\varphi(P^{-1}AP) = P^{-1}\varphi(A)P$

証明省略