

3. 線型写像

3. 1. 写像の振り返り

3. 1. 1. 写像の定義

3. 1. 2. 全射・単射・全単射

3. 1. 3. 逆写像

3. 1. 4. 合成写像

3. 2. 線型写像

3. 2. 1. 線型写像の定義

3. 2. 2. 線型写像空間

3. 3. 線型変換

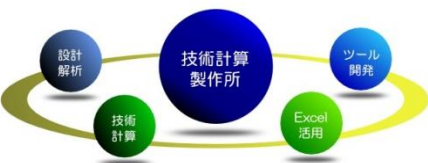
3. 4. 像・核・階数

写像とは端的に言ってしまえば、**二つの集合の間を取り持つ規約**

その中で、線型代数で扱う写像とは



線型空間で定義された演算、**加法とスカラー倍を保存する写像 = 線型写像**



3. 1. 写像の振り返り

3. 1. 1. 写像の定義

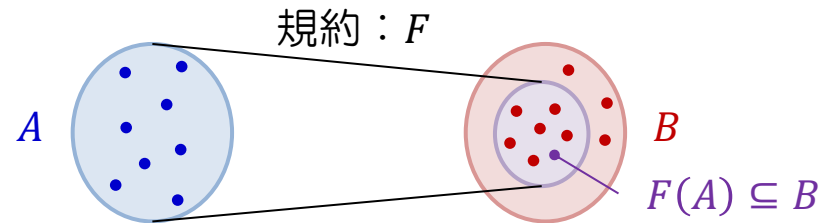
<写像の定義>

集合 A の任意の元 a に対して、集合 B の元を一意的に定める規約 $F : A \rightarrow B$

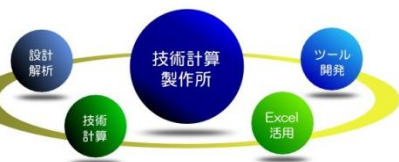
$a \in A$ の写像 F による像 $= F(a)$

A の元の F による像すべてで作られる集合 $= F(A)$

写像 F に対して、集合 $A = \textbf{Fの定義域}$ 、集合 $F(A) = \textbf{Fの値域}$



定義から明らかなように、 B のすべての元が A の元と対応するわけではない
 $\Rightarrow F(A) \subseteq B$ の根拠



3. 1. 写像の振り返り

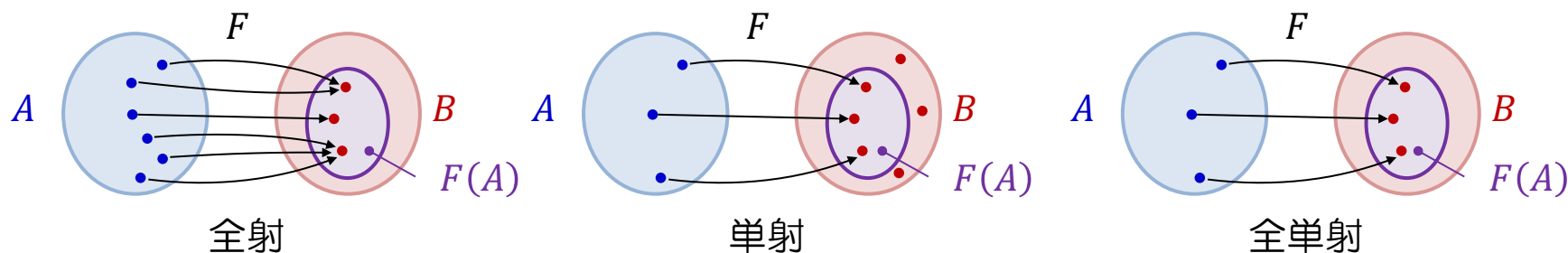
3. 1. 2. 全射・単射・全単射

<全射・単射・全単射の定義>

全射 : $F(A) = B$

単射 : $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow F(a_1) \neq F(a_2)$

全単射 : 全射かつ単射



特に**全単射**は集合論上 “ $A \cong B$ ” (A と B は**同型**) $\equiv A$ と B は同じ構造を持つ

3. 1. 写像の振り返り

3. 1. 3. 逆写像

写像のうち“全単射”は非常に特徴的（前頁図参照）

(1) $F(A) = B$

(2) A の元と B の元は一对一の関係

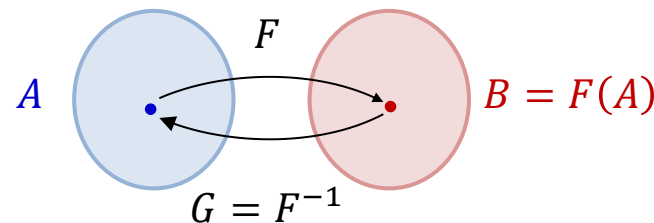


<逆写像の定義>

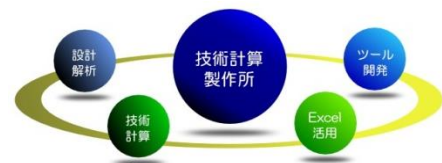
写像 $G: B \rightarrow A$ が写像 $F: A \rightarrow B$ に対する次の二条件を満足するもの

(1) $\forall a \in A$ に対し、 $G(F(a)) = a$

(2) $\forall b \in B$ に対し、 $F(G(b)) = b$



写像 F は全単射 $\equiv$ 写像 F は逆写像を持つ

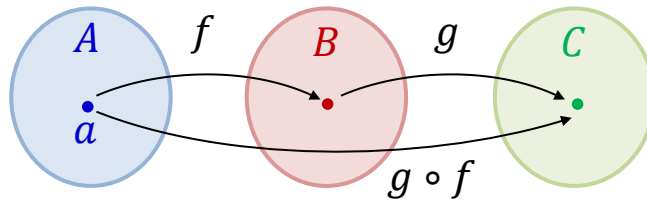


3. 1. 写像の振り返り

3. 1. 4. 合成写像

<合成写像の定義>

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対し $g \circ f: A \rightarrow C$



$$\forall a \in A \text{ に対し } (g \circ f)(a) = g(f(a)) \in C$$

定理3.1.4-1) 合成写像

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ について

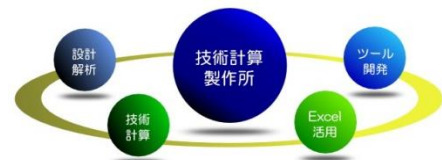
- (1) f, g がともに全射 $\Rightarrow g \circ f$ も全射
- (2) f, g がともに単射 $\Rightarrow g \circ f$ も単射
- (3) f, g がともに全単射 $\Rightarrow g \circ f$ も全単射

証明省略

定理3.1.4-2) 合成写像の結合律

合成写像は結合律が成り立つ $\Rightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

証明省略



3. 2. 線型写像

3. 2. 1. 線型写像の定義

<線形写像の定義>

線型空間 U , V に対する写像 $F: U \rightarrow V$ が次の二条件を満足

$$(1) \forall \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U \Rightarrow F(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{u}')$$

$$(2) \forall \mathbf{u} \in U, c \in K \Rightarrow F(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u})$$



線型写像は“加法”と“スカラー倍”の演算を保存する

定理3.2-1) 線形写像の存在定理

n 次 K 線型空間 U の基底を $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ とすると、

$$\forall \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V \text{ に対し、 } F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, F(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n \quad \dots (1)$$

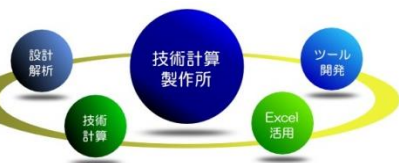
となる線形写像 $F: U \rightarrow V$ がただ一つ存在する。

このとき F は

$$F(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n \quad \dots (2)$$

で定義される。

証明は次ページ



技術計算製作所

<http://gijyutsu-keisan.com/>

3. 2. 線型写像

3. 2. 1. 線型写像の定義

証明 *****

まずは線型写像 F の存在を肯定して、 F の一意性について証明する。

$\forall \mathbf{u} \in U$ は U の基底 $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ の線型結合 $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$ によって一意に表せる。

F は線形写像であるから、

$$F(\mathbf{u}) = F(c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n) = c_1 F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_n F(\mathbf{u}_n) = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n \quad (\because (1))$$

$F(\mathbf{u})$ の一意性は $d_1, \dots, d_n \in K$ を用いて $F(\mathbf{u}) = d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n$

$$\forall \mathbf{v} \in V \text{ に対し、 } (c_1 - d_1) \mathbf{v}_1 + \cdots + (c_n - d_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_i = d_i (i = 1, \dots, n)$$

従って、線型写像 F は(2)式によって一意に定義される。

次に(2)によって定義される写像 F が線形写像であることを証明する。

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ を U の基底 $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ の線型結合 で表す $\Rightarrow \mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}' = c'_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c'_n \mathbf{u}_n$

加法について $F(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = F(c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n + c'_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c'_n \mathbf{u}_n)$

$$= F((c_1 + c'_1) \mathbf{u}_1 + \cdots + (c_n + c'_n) \mathbf{u}_n)$$

$$= (c_1 + c'_1) \mathbf{v}_1 + \cdots + (c_n + c'_n) \mathbf{v}_n$$

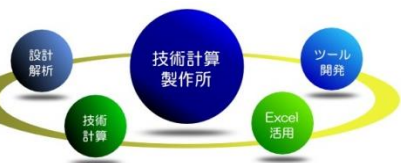
$$= (c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n) + (c'_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c'_n \mathbf{v}_n)$$

$$= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{u}')$$

スカラー倍について $F(c\mathbf{u}) = F(cc_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + cc_n \mathbf{u}_n) = cc_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + cc_n \mathbf{v}_n = c(c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n) = cF(\mathbf{u})$

となって、線型写像の定義を満足する。

***** おわり



3. 2. 線型写像

3. 2. 2. 線型写像空間

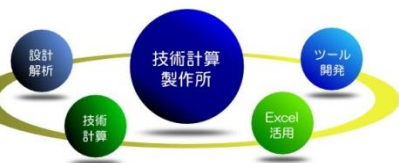
<線形写像空間の定義>

線型空間 U から V への線形写像全体の集合 $L(U, V)$ に対して次の演算を定義することで、 $L(U, V)$ が線型空間となるもの

(1) 線形写像の和 $:(F + G)(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{u})$

(2) 線型写像のスカラー倍 $:(cF)(\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u})$

線型空間の公理を満足することは実際に計算すれば確認できる



3. 3. 線型変換

<線形変換の定義>

線型写像のうち、 V から V 自身へ写す写像 $T: V \rightarrow V$

命題3.3.1-1) 線型変換は積を保存

線型変換全体の線形写像空間 $L(V, V)$ は積を保存

$$\forall S, T \in L(V, V) \Rightarrow ST \in L(V, V)$$

証明省略

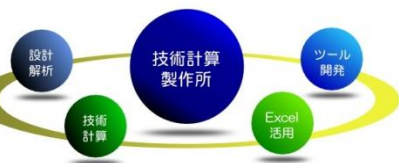


線型変換は“加法” “スカラー倍” “乗法” の演算に関して閉じる

特別な線型変換として、

零変換 O : $\forall \mathbf{u} \in U \Rightarrow O(\mathbf{u}) = \mathbf{o}' \in V$

恒等変換 I : $\forall \mathbf{u} \in U \Rightarrow I(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \in V$



技術計算製作所

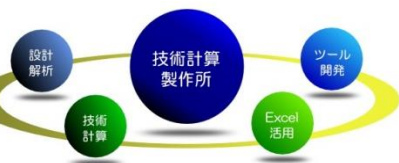
<http://gijyutsu-keisan.com/>

3. 3. 線型変換

命題3.3.1-1) 線型変換の性質

- I. 加法の公理 $\forall S, T \in L(V, V) \Rightarrow T + S \in L(V, V)$ に対し
- (1) 結合律 : $(S + T) + R = S + (T + R)$
 - (2) 交換律 : $S + T = T + S$
 - (3) 零元の存在 : $T + 0 = 0 + T = T$ となる $0 \in L(V, V)$ が存在 (零変換)
 - (4) 反対元の存在 : $T + T' = T' + T = 0$ となる唯一つの $T' \in L(V, V)$ が存在
- II. スカラー倍の公理 $\forall T \in L(V, V), \forall c \in K \Rightarrow cT \in L(V, V)$ に対し
- (5) 分配律 : $c(S + T) = cS + cT, (c + d)T = cT + dT$
 - (6) 結合律 : $(cd)T = c(dT)$
 - (7) 単位元の存在 : $1T = T$
- III. 乗法の公理 $\forall S, T \in L(V, V) \Rightarrow ST \in L(V, V)$ に対し
- (8) 結合律 : $(ST)R = S(TR)$
 - (9) 単位元の存在 : $TI = IT = T$ となる $I \in L(V, V)$ が存在 (恒等変換)
- IV. 乗法と加法の関係に関する公理
- (10) 分配律 : $(S + T)R = SR + TR, S(T + R) = ST + SR$

証明省略



技術計算製作所

<http://gijyutsu-keisan.com/>

3. 3. 線型変換

< 逆変換・正則の定義 >

逆変換 : $T^{-1} \in L(V, V)$ は T の逆写像 $\Leftrightarrow TT^{-1} = T^{-1}T = I$

正則 : 逆変換を持つ線型変換 T



このとき、線型変換 T は全単射

< べき乗の定義 >

$n \in \mathbb{N}$ に対して、 $T^0 = I$ 、 $T^n = TT \cdots T$ (T の n 個の積 = T の n 乗)

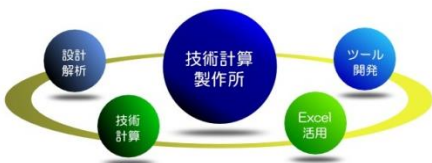
命題3.3-1) 多項式 $\rightarrow$ 線型変換への線型写像

多項式 $f(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_nt^n \in K[t]$ 、線型変換 $T \in L(V, V)$ に対して

$$f(T) = c_0I + c_1T + \cdots + c_nT^n \in L(V, V)$$

を定義すれば、写像 $K[t] \rightarrow L(V, V)$ は線型写像であり、積を保存する。

証明省略



技術計算製作所

<http://gijyutsu-keisan.com/>

3. 4. 同型写像

<同型写像の定義>

線型写像 $F: U \rightarrow V$ が全単射であるもの



線型写像 F が **同型写像** $\equiv$ 線形写像 F は **正則** (**逆写像** を持つ)

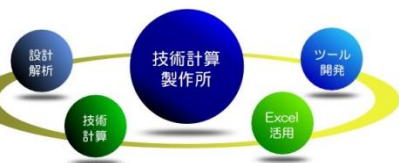
U と V が同型 ($U \cong V$) とは

$$(1) F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \text{ (単射の条件)}$$

$$(2) F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$(3) F(c\mathbf{u}_1) = c\mathbf{v}_1$$

$\forall \mathbf{u} \in U$ が V において $\mathbf{v} = F(\mathbf{u})$ に置き換えられる以外、 U と V は全く同じ構造を持つ



3. 4. 同型写像

命題3.4-1) 同型の条件

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

証明 *****

まずは $\dim U = \dim V = n \Rightarrow U \cong V$ を証明する。

U の基底を $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ 、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ とするとき、線型写像 $F: U \rightarrow V$ による $\forall \mathbf{u} \in U$ の像は

$$F(\mathbf{u}) = F(c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n) = c_1 F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_n F(\mathbf{u}_n) = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n \in V$$

となる。 $\dim V = n$ であることを考慮すれば

$$V = K\mathbf{v}_1 + \cdots + K\mathbf{v}_n$$

を満たし、 $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ は V の基底をなす (2.5節基底の定義)。つまり、 $F(U) = V$ となって F は全射。

$\mathbf{u} \neq \mathbf{u}', F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}, F(\mathbf{u}') = \mathbf{v}'$ のとき $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ を仮定すると、 $c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = c'_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c'_n \mathbf{v}_n \Rightarrow c_1 = c'_1, \dots, c_n = c'_n$ となって $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ に矛盾。よって、 $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ となり F は単射。結局 F は全単射となり同型写像。

次に $U \cong V \Rightarrow \dim U = \dim V = n$ を証明する。

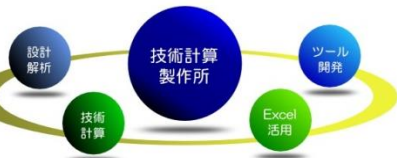
線型写像 $F: U \rightarrow V$ は同型写像ゆえ全単射。 n 次元線型空間 U の基底を $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ 、その F による像を

$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, F(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n \in V$ とすると、

$$F(\mathbf{u}) = F(c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n) = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n$$

また F が単射であることと、 $(c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0) \Rightarrow F(\mathbf{o}) = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}'$ によって、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は線型独立となる。よって、 $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ は V の基底となり $\dim V = n$ 。

***** おわり



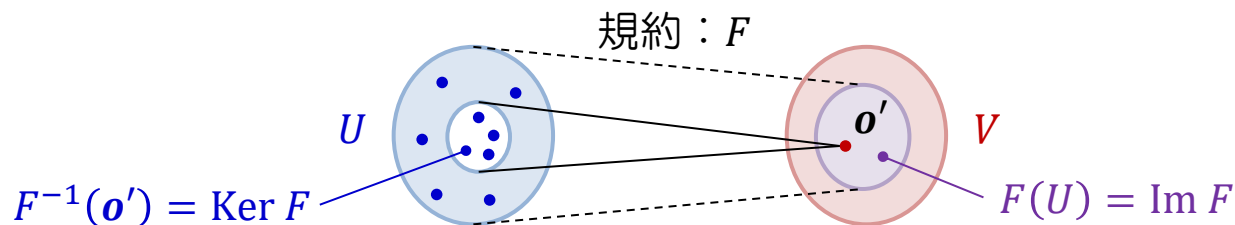
3. 5. 像・核・階数

<像・核の定義>

線型写像 $F: U \rightarrow V$ について

(1) F の像 ($\text{Im } F$) : $F(U) = \{F(\mathbf{u}) | \mathbf{u} \in U\}$

(2) F の核 ($\text{Ker } F$) : $F^{-1}(\mathbf{o}') = \{\mathbf{u} | F(\mathbf{u}) = \mathbf{o}', \mathbf{u} \in U, \mathbf{o}' \in V\}$



<階数の定義>

線型写像 F の像 $\text{Im } F$ の次元 $= \dim(\text{Im } F)$

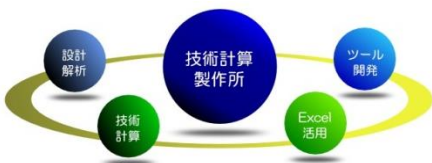
退化次数 = 核 $\text{Ker } F$ の次元

命題3.5-1) 像と核は部分空間

(1) $\text{Im } F \subseteq V$

(2) $\text{Ker } F \subseteq U$

部分空間の条件に適用すれば証明できる



技術計算製作所

<http://gijyutsu-keisan.com/>

3. 5. 像・核・階数

定理3.5-1) 次元定理

線型写像 $F: U \rightarrow V$ について、 $\dim U = \dim(\text{Im } F) + \dim(\text{Ker } F)$

証明 *****

$\dim(\text{Ker } F) = r, \dim U = n$ としたとき、 $\dim(\text{Im } F) = n - r$ となることを証明する。

$\text{Ker } F \subseteq U$ なので、 $\text{Ker } F$ の基底 $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r)$ を延長して U の基底 $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r \mathbf{u}_{r+1} \cdots \mathbf{u}_n)$ をつくれる（延長定理 2.5節）。

$\forall \mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_r \mathbf{u}_r + c_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$ の F による像は

$$F(\mathbf{u}) = c_1 F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_r F(\mathbf{u}_r) + c_{r+1} F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + c_n F(\mathbf{u}_n) \in \text{Im } F$$

ところで、 $\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r \in \text{Ker } F$ であるから $F(\mathbf{u}_1) = \cdots = F(\mathbf{u}_r) = \mathbf{o}'$ ゆえ

$$F(\mathbf{u}) = c_{r+1} F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + c_n F(\mathbf{u}_n) \in KF(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + KF(\mathbf{u}_n) = \text{Im } F$$

このとき $F(\mathbf{u}_{r+1}) \cdots F(\mathbf{u}_n)$ が線型独立であることがいえれば証明は完了する。

そこで $c_{r+1} F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + c_n F(\mathbf{u}_n) = \mathbf{o}'$ を満足する $c_{r+1}, \dots, c_n \in K$ を求める。

F は線型写像であるから

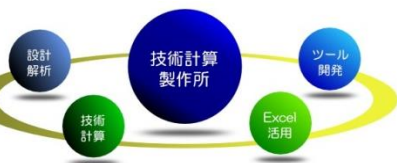
$$\mathbf{o}' = c_{r+1} F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + c_n F(\mathbf{u}_n) = F(c_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + c_n \mathbf{u}_n) \Rightarrow c_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + c_n \mathbf{u}_n \in \text{Ker } F$$

従って、 $\text{Ker } F$ の基底の線型結合で表せる。

$$c_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + c_n \mathbf{u}_n = b_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + b_r \mathbf{u}_r \quad (b_1, \dots, b_r \in K)$$

ところが、 $\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r \mathbf{u}_{r+1} \cdots \mathbf{u}_n$ は U の基底であるから $c_{r+1} = \cdots = c_n = b_1 = \cdots = b_r = 0$ が得られ、 $F(\mathbf{u}_{r+1}) \cdots F(\mathbf{u}_n)$ は線型独立。

***** おわり



3. 5. 像・核・階数

命題3.5 -2) 線形写像の核の構造

線型写像 $F: U \rightarrow V$ があって、 $\mathbf{b} \in V$ の逆像 $F^{-1}(\mathbf{b})$ が空でないとき、そこから任意の元 $\mathbf{x}_o$ を一つとれば、

$$F^{-1}(\mathbf{b}) = \mathbf{x}_o + F^{-1}(\mathbf{o}') = \{\mathbf{x}_o + \mathbf{x} | \mathbf{x} \in F^{-1}(\mathbf{o}')\}$$

証明 *****

$F^{-1}(\mathbf{o}') \subseteq U$ に含まれる元 $\mathbf{x}$ の像は $F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}' \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{o}'$ 。 $F(\mathbf{x}_o) = \mathbf{b}$ でもあるから

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{o}' = F(\mathbf{x}_o) + F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_o + \mathbf{x})$$

つまり、 $\mathbf{x}_o + \mathbf{x} \in U$ の F による像が $\mathbf{b} \in V$ であることを示している。

***** おわり

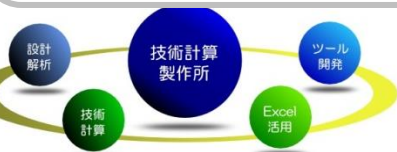
この命題は、後で見る“連立方程式の解の構造定理”で必要となる。

命題3.5 -3) 線形写像の同値性

線型写像 $F: U \rightarrow V$ について、 $\dim U = \dim V < \infty$ のとき

- (1) F の核が零元 $\mathbf{o}$ のみ $\Rightarrow F^{-1}(\mathbf{o}) = \{\mathbf{o}\}$
- (2) $\text{rank } F = \dim V$
- (3) F は単射
- (4) F は全射
- (5) F は全単射

証明省略



技術計算製作所

<http://gi jyutsu-keisan.com/>