2. 線型空間

2. 1. 線型空間
2. 2. 部分空間
2. 3. 線型結合
2. 4. 線型独立
2. 5. 基底と次元

線型空間によって、線型代数はその研究範囲（集合）が明確化される

↓

線型空間を定義する条件 = 線型代数の根源的概念

本節以降、特別な指定がない限り数体を“K”で表し、Kに対する宣言は省略する。
Kは数体なら何でも構わないが、一般に実数体R、複素数体Cのどちらかを想定して構わない。

2．1．線型空間

＜線型空間の定義＞

集合Vが次の“線型空間の公理”を満足するもの

線型空間の公理

I. 加法の公理　$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$に対し

(1)結合律　：$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

(2)交換律　：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(3)零元の存在　：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$となる$\boldsymbol{o} \in V$が存在

(4)逆元の存在　：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$となる唯一つの$\boldsymbol{u}' \in V$が存在

II. スカラー倍の公理　$\forall \boldsymbol{u} \in V, \forall c \in K \Rightarrow c\boldsymbol{u} \in V$に対し

(5)分配律　：$c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$、$(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}$

(6)結合律　：$(cd)\boldsymbol{u} = c(d\boldsymbol{u})$

(7)単位元の存在：$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

“線型空間の公理” ＝ 線型代数を考察する上での**根源的概念**

線型空間は、Kを前提に成立しているので数体を明示して、K上の線型空間、K線型空間などともいう。

2．1．線型空間

“**線型空間の公理**” を満足する　⇒　端的に言えば

線型空間Vとは、　“加法” と “スカラー倍” の演算に関して閉じた集合

（1）加法に関して閉じる　　：$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$

（2）スカラー倍に関して閉じる　　：$\boldsymbol{v} \in V, c \in K \Rightarrow c\boldsymbol{u} \in K$

なお、数体K自身も線型空間

零元$\boldsymbol{o}$の特徴について

（1）零元$\boldsymbol{o}$の存在により、線型空間$V \neq$空集合ϕ

（2）零元$\boldsymbol{o}$は一意

$\boldsymbol{o}$元の一意性に関する証明　********************

Vに2つの零元$\boldsymbol{o}$、$\boldsymbol{o}'$があると仮定する。線形空間の公理（3）により

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}'$とおいて、$\boldsymbol{o}' + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}'$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$とおいて、$\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}' + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$

線型空間の公理（2）を考慮すれば、$\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}$が得られる。

********************　おわり

2. 2. 部分空間

＜部分空間の定義＞

線型空間Vの部分集合Wが“加法”と“スカラー倍”の演算に関して閉じたもの

命題2.2-1）部分空間の条件

（1）$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in W \to \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$ (Wは加法について閉じている)

（2）$\forall \boldsymbol{u} \in W$、$\forall c \in K \to c\boldsymbol{u} \in W$ (Wはスカラー倍について閉じている)

証明 ********************

Vの空でない部分集合をWとし、$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in W$、$\forall c \in K$とする。

Wが部分空間のとき、部分空間の条件（1）（2）を満たすのは明らか。

Wが部分空間の条件を満足するとき、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W \subseteq V$、$c\boldsymbol{u} \in W \subseteq V$

Wの任意の元はVの元でもあるため線型空間の公理を満足する。

零元、単位元の存在 → $c=0,1$とおけば $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}, 1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u} \in W$。

逆元の存在 → $\boldsymbol{o} \in W \Rightarrow \boldsymbol{o}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W \Leftrightarrow \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u} \in W$。

******************** おわり

命題2.2-1によって、

線型空間であるための証明 ≅ 部分空間の条件を満足する

2．2．部分空間

Vの部分空間U_1、U_2、…、U_nについて

＜部分空間の和の定義＞

$\boldsymbol{u_1} \in U_1, \boldsymbol{u_2} \in U_2$のとき、$\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}$で表される元全体の集合$U_1 + U_2$

命題2.2-2）部分空間の演算

（1）$U_1 \cap U_2$はVの部分空間

（2）$U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ はVの部分空間

証明　********************

（1）について

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_1 \cap U_2$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U_1 \wedge \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U_2, c\boldsymbol{x} \in U_1 \wedge c\boldsymbol{x} \in U_2$（部分空間の条件（命題2.2-1）を満足）

（2）について

$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} \in U_1, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2} \in U_2$ に対し $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} \Rightarrow \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_1 + U_2$とおけば

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{y_1}) + (\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{y_2}) \in U_1 + U_2, c\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x_1} + c\boldsymbol{x_2} \in U_1 + U_2 \quad \Rightarrow \quad \therefore U_1 + U_2 \subseteq V$$

これを拡張して$U_1 + \cdots + U_n \subseteq V$

********************　おわり

※：**和「$\boldsymbol{U_1} + \cdots + \boldsymbol{U_n}$」と和集合「$\boldsymbol{U_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U_n}$」は別物**

$U_1 + \cdots + U_n = \{\boldsymbol{u_1} + \cdots + \boldsymbol{u_n} | \boldsymbol{u_1} \in U_1, \ldots, \boldsymbol{u_n} \in U_n\}$ に対し $U_1 \cup \cdots \cup U_n = \{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$

$\therefore U_1 \cup \cdots \cup U_n \subseteq U_1 + \cdots + U_n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \in U_1 \cup U_2$ が成り立つとは限らない　$\Rightarrow$　**$\boldsymbol{U_1} \cup \boldsymbol{U_2}$は部分空間とは限らない**

2. 3. 線型結合

＜線型結合の定義＞

Vの元が $\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n} \in V, c_1, \cdots, c_n \in K$を用いて次の形で表せるもの

$$c_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} \in V$$

線型結合は一次結合ともいう

＜命題2.3-1＞

線型結合全体の集合$W = K\boldsymbol{v_1} + \cdots + K\boldsymbol{v_n}$は$V$の部分空間

証明は命題2.2-2（2）に線型結合を適用するだけなので省略

$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ → 部分空間Wの**生成元**

$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$によって**張られる**または**生成される空間** → $W = K\boldsymbol{v_1} + \cdots + K\boldsymbol{v_n}$

線型結合による表現は、以降、線型代数の数々の命題証明において活用される

2. 4. 線型独立

＜線型関係の定義＞

線型関係： $c_1\boldsymbol{v_1}+\cdots+c_n\boldsymbol{v_n}=\boldsymbol{o}\quad(\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}\in V, c_1,\cdots,c_n\in K)$

⬇

線型関係を満足する$c_1,\cdots,c_n$の条件で場合分け

＜線型独立・線型従属の定義＞

線型独立　：必ず $c_1=0,\cdots,c_n=0$

線型従属　：線型独立以外

※線型独立、線型従属は一次独立、一次従属とも呼ぶ。

$\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}\in V, c_1,\cdots,c_n\in K$に対し、

線型従属： $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}$ のうちの1つを他の$n-1$個の線型結合で表せる。

$$\boldsymbol{v_j}=c_1\boldsymbol{v_1}+\cdots+c_{j-1}\boldsymbol{v_{j-1}}+c_{j+1}\boldsymbol{v_{j+1}}+\cdots+c_n\boldsymbol{v_n}$$

線型独立：どれも他の$n-1$個の線型結合では表せない。

$$\boldsymbol{v_j}\neq c_1\boldsymbol{v_1}+\cdots+c_{j-1}\boldsymbol{v_{j-1}}+c_{j+1}\boldsymbol{v_{j+1}}+\cdots+c_n\boldsymbol{v_n}$$

線型独立 → 線型空間の骨組みを構築するために“必須”の概念

2．4．線型独立

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$が線型独立のとき、

＜命題2.4-1＞独立元は相違 かつ $\neq \boldsymbol{o}$

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$はすべて互いに相違、かつ$\boldsymbol{o}$でない

証明省略

＜命題2.4-2＞線型独立の一部も線型独立

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$の一部もまた線型独立

証明省略

＜命題2.4-3＞独立元の入れ替え

$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r \in K\boldsymbol{v}_1 + \cdots + K\boldsymbol{v}_n (r \leq n)$ が線型独立なら、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$の中の適当な r 個、例えば $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$を$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r$に置き換えて

$$K\boldsymbol{v}_1 + \cdots + K\boldsymbol{v}_n = K\boldsymbol{w}_1 + \cdots + K\boldsymbol{w}_r + K\boldsymbol{v}_{r+1} + \cdots + K\boldsymbol{v}_n$$

証明省略

2．5．基底と次元

＜基底の定義＞

Vのn個の元の集合$\{\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}\}$が次の二条件を満足するもの

（1）$\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}$ は線型独立

（2）$\forall\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v_1}+\cdots+c_n\boldsymbol{v_n}\in V$　つまり　$V=K\boldsymbol{v_1}+\cdots+K\boldsymbol{v_n}$

基底を構成する元の順序を考慮 = **順序基底**（$\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}$）

以降、断りがない限り“**基底 = 順序基底**”とする

＜次元の定義＞

基底を構成する元の数 $\dim V=n$

特に$\{\boldsymbol{o}\}$の次元 = 0次元（$\dim V=0$）

命題2.4-1によって、Vの一つの元$\boldsymbol{v}$が線型独立　⇒　$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$

$V\neq\{\boldsymbol{o}\}$は少なくとも一つ線型独立な元を持つ

基底とは、線型空間の骨組みを構築する概念

次頁以降示す基底と次元の性質は、

2．5．基底と次元

＜定理2.5-1＞基底の延長定理

$\dim V = n\,(<\infty)$ かつ $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_r}\in V$が線型独立のとき、 $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_r}\ (1\le r\le n)$ に $\boldsymbol{v_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{v_n}$ を付け加えて$(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_n})$を$V$の基底とできる

証明　*******************

$W = K\boldsymbol{v_1}+\cdots+K\boldsymbol{v_r}$とする。

$r=n$ なら $W=V$ ゆえ$(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_n})$は$V$の基底。

$r<n$ なら $(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_r})$ はVの基底ではない。

このとき $\boldsymbol{v_{r+1}}\notin W$かつ $\boldsymbol{v_{r+1}}\in V$が存在し、$\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_r},\boldsymbol{v_{r+1}}$は互いに独立である。

$n=r+1$ならば$(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_r}\ \boldsymbol{v_{r+1}})$ はVの基底。

$n=r+2$ならば$\boldsymbol{v_{r+1}},\boldsymbol{v_{r+2}}\notin W$かつ $\boldsymbol{v_{r+1}},\boldsymbol{v_{r+2}}\in V$が存在し$(\boldsymbol{v_1}\ \cdots\ \boldsymbol{v_r}\boldsymbol{v_{r+1}}\ \boldsymbol{v_{r+2}})$ はVの基底。

これを$n-r$回繰り返せば良い。

*******************　おわり

2．5．基底と次元

＜定理2.5-2＞基底の存在定理

$V=\{\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_m}\}(\neq\{\boldsymbol{o}\})$ のとき、Vの部分集合でVの基底となるものが存在する

証明　********************

$\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_m}$ はVの生成元　⇒　$V=K\boldsymbol{v_1}+\cdots+K\boldsymbol{v_m}$

命題2.4-1 により $V\neq\{\boldsymbol{o}\}$ なので線型独立な元 $\boldsymbol{v_1}$ が必ず一つは存在する。

そこで、V の線型独立な元で構成される部分集合のうち最も多くの元を持つものの1つを$S=\{\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}\}(n\leq m)$ とする。

$n=m$ ならば $V=S$ であり、S自身が基底の定義を満足することからVの基底となる。

$n<m$ ならば $\boldsymbol{v_k}(n<k\leqq m)$は $\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_n}$ の線型結合で表せるので、$K\boldsymbol{v_{n+1}}+\cdots+K\boldsymbol{v_m}=K\boldsymbol{v_1}+\cdots+K\boldsymbol{v_n}$。

従って、$K\boldsymbol{v_1}+\cdots+K\boldsymbol{v_n}+K\boldsymbol{v_{n+1}}+\cdots+K\boldsymbol{v_m}=K\boldsymbol{v_1}+\cdots+K\boldsymbol{v_n}=V$。

******************** おわり

2．5．基底と次元

＜命題2.5-1＞基底による元の表現の一意性

$\forall \boldsymbol{v} \in V$は基底 $(\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n})$ の線型結合で一意に表せる

$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + b_n\boldsymbol{v_n} = c_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$とおけば$b_i = c_i$しかないことが簡単に言える

＜命題2.5-2＞次元の一意性

Vの次元は一意に決まる

$V = K\boldsymbol{v_1} + \cdots + K\boldsymbol{v_n} = K\boldsymbol{u_1} + \cdots + K\boldsymbol{u_r}$とおいて$n = r$となることを、命題2.4-3を用いて証明できる

＜命題2.5-3＞線型独立と基底の関係

（1）Vのn個の線型独立な元$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$は、$V$の基底を構成する

（2） Vが$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$で生成されるなら、$(\boldsymbol{v_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v_n})$は$V$の基底となる

＜命題2.5-4＞部分空間の次元

（1）$\dim W \le \dim V < \infty$

（2）$\dim W = \dim V$のときに限り$W = V$

＜命題2.5-5＞部分空間の次元の分解

$U, W \subseteq V$のとき、$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$

命題2.5-3～2.5-5 証明省略