～～～　抽象線型代数　～～～

1．集合・数体

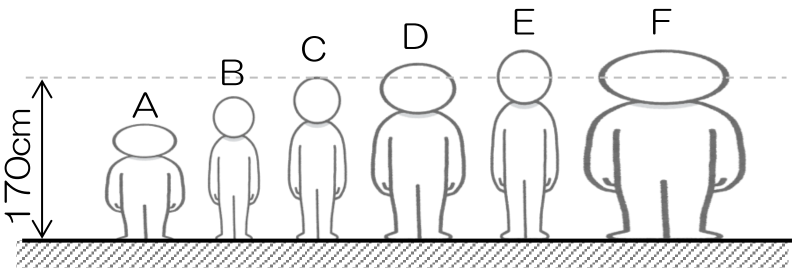
線型代数を論じる上で必要となる“集合”と“数体”の概念から話を始める。
“数体”と仰々しく言ってはいるが、簡単に言えば実数や複素数といった身近な数が、加法と乗法に関し閉じた集合（つまり数体の元同士を足したり掛けたりしたものも数体の元となること）である。

1．1．集合と空間

＜集合の定義＞

集合（A, B, C, …）　：ある**明確な**条件を満たす“もの”の集まり

元（a, b, c, …）　：集合を構成する“もの”



例えば

身長170cm以上のグループ　⇒集合$\{C, D, E, F\}$

大きい人のグループ　⇒集合ではない

（条件が明確ではないので人を選べない）

a, b, c, …はAの元である　：$a, b, c, \cdots \in A$

a, b, c, …を元とする集合A　：$\{a, b, c, \cdots\} = A$

一つも元を持たない集合　：空集合 $\emptyset = \{\}$

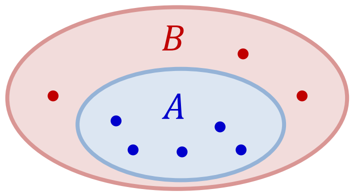
＜空間の定義＞

集合に何らかの数学的構造（演算など）を付与したもの

1．1．集合と空間

＜部分集合の定義＞

集合Aのすべての元が集合Bの元でもあるようなA ：$A \subseteq B$



$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a \in A \Rightarrow \forall a \in B)$

真部分集合：$A \neq B$の部分集合 → $A \subset B$

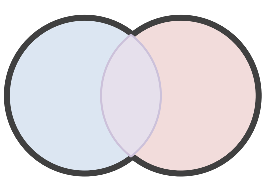
＜和集合・積集合・直和・直積の定義＞

（1）和集合　$A \cup B$　：Aの元とBの元をすべて含む集合

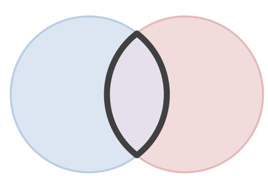
（2）積集合　$A \cap B$　：AとBの両方に属するすべての元の集合

（3）直和　$A \oplus B$　：Aの元とBの元をすべて含み、$A \cap B$が空集合

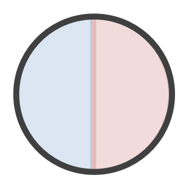
（4）直積　$A \times B$　：Aの元aとBの元bの組 (a, b) を元とする集合



$A \cup B$

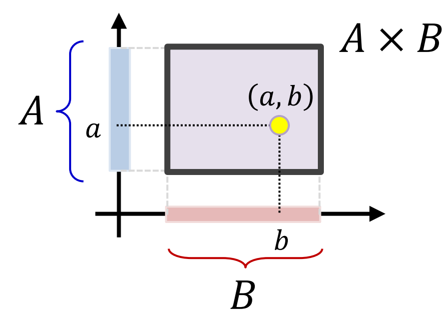


$A \cap B$



$A \oplus B$

$(A \cap B = \emptyset)$



1．2．数体

数体を定義する前に．．．　“**複素数**”を定義する（実数Rは既知）

実数二つの組(a,b)の全体がなす集合Cの$\forall\alpha,\beta\in C$に“和”と“積”の演算を定義

$\alpha=(a,b),\beta=(c,d)$に対し、和：$\alpha+\beta=(a+c,b+d)$、積：$\alpha\beta=(ac-bd,ad+bc)$

集合Cが下記“**体の公理**”を満足するときのCの元 = “**複素数**”

体の公理

$\forall\alpha=a+bi,\beta=c+di\in C$ (i: 虚数)に対し

I. 加法の公理　$\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)\in C$に対し

（1）結合律　：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（2）交換律　：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（3）零元の存在　：$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$ となる$0\in C$が存在

（4）反対元の存在　：$\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=0$ となる$\alpha'=-\alpha\in C$が存在

II. 乗法の公理　$\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)\in C$に対し

（5）結合律　：$(\alpha\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

（6）交換律　：$\alpha\beta=\beta\alpha$

（7）単位元の存在　：$1\alpha=\alpha$ となる$1\in C$が存在

その他、複素数の性質は割愛

1．2．数体

＜数体の定義＞

複素数Cの部分集合Kが0と1を含み、Cの“加法”と“乗法”に関して閉じたもの

$\forall a, b \in K$に対し以下の演算が成り立つこと

（1）$a + b \in K$

（2）$ab \in K$

（3）$a \neq 0 \Rightarrow 1/a \in K$

（4）$0,1 \in K$

数体の例として、

複素数体C	：複素数を元とする数体
実数体R	：実数を元とする数体

整数Zや自然数Nは数体とはならない（∵上記（3）を満足できない）

数体は「 集合 → 群 → 環 → 体 」の順に拡張して定義される

1．2．数体

群G：集合G（$\neq \varphi$）に1つの二項演算が定義されたもの

$\forall a, b \in G,$ 二項演算の記号“$*$”に対し

（1）結合律：$(a * b) * c = a * (b * c)$

（2）単位元の存在：$e * a = a * e = a$ となる $e \in G$ が存在

（3）逆元の存在：$a * b = b * a = e$ となる $b \in G$ が存在

可換律（交換律）$a * b = b * a$ を満たすGを**可換群**（Abel群）と呼ぶ

環R：集合R（$\neq \emptyset$）に加法（″$*$″ = ″$+$″）と乗法（″$*$″ = ″$\times$″）が定義されたもの

$\forall a, b \in G \Rightarrow a + b, ab \in G$に対し

（1）Rは可換群

（2）Rの乗法は結合律を満たす

（3）Rの乗法は分配律を満たす

（4）単位元の存在

※群と環の違い：群は1つの算法を持つ　/　環は2つの算法を持つ

体K：集合K（$\neq \emptyset$）が環Rの性質を持ち、さらに次の条件を満足するもの

（1）逆元の存在：$\forall a \in K (a \neq 0) \Rightarrow ab = ba = 1$となる$b \in K$が存在

（2）交換律：$\forall a, b \in K \Rightarrow ab = ba$