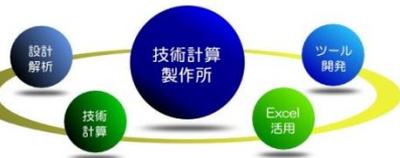


# 9. 剛体の運動

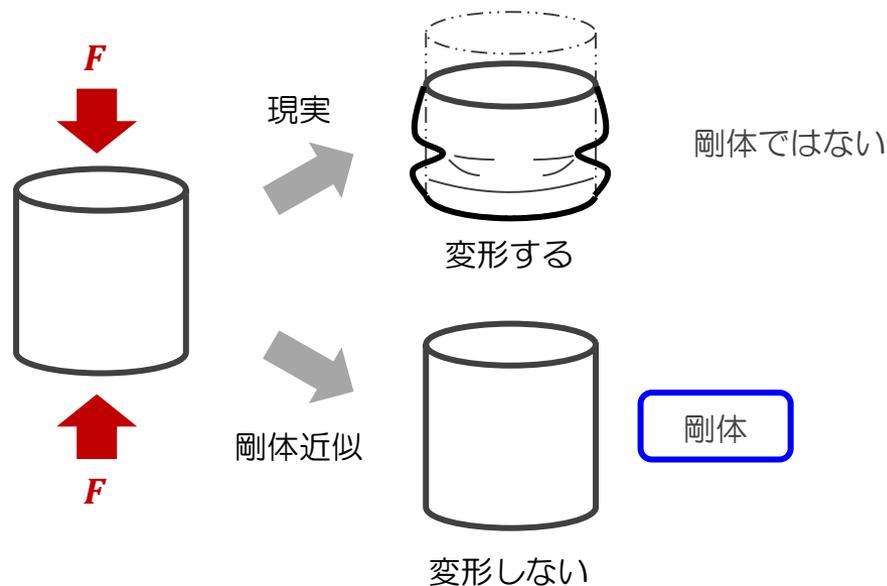
---

- 9. 1. 剛体とは？
- 9. 2. 剛体の運動
- 9. 3. 慣性テンソル
- 9. 4. 剛体の運動方程式
- 9. 5. 剛体の簡単な運動例



## 9. 1. 剛体とは？

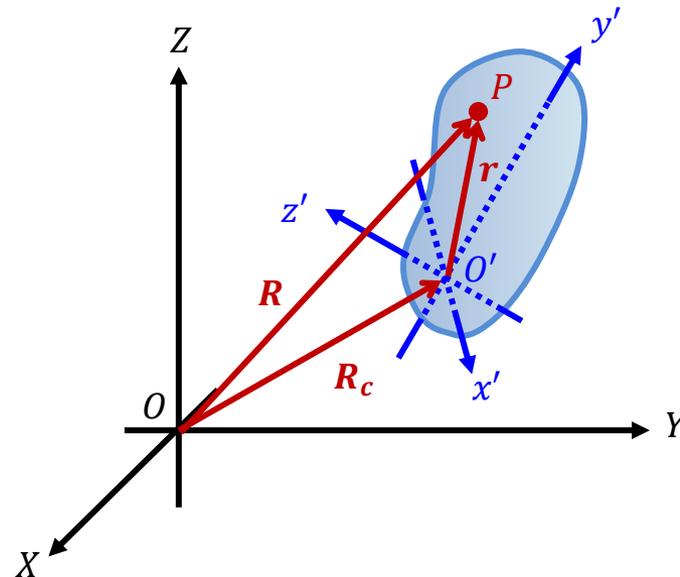
前章では、物体を質点の集まり = 質点系として扱い、その運動を表現してきた。本章では、個の質点系の概念を用い、さらに外力が働いても変形しない物体を扱ってみよう。変形しないとは「**物体を構成している質点間の距離が絶対変わらない**」ことである。このような物体を“**剛体**”と呼ぶ。**剛体は現実には存在しない理想化されたモデル**である。しかし、物体が固体であればこのような**近似**で十分物体の運動を予測することができる。



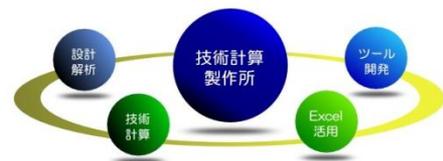
## 9. 2. 剛体の運動

剛体はその内部の相互間距離が不変であることから、質点系として扱う際にその距離変化について考察する必要はない。

そこで、剛体の運動を記述するために2つの座標系を導入する。1つは空間上の静止座標系  $O - XYZ$ 、もう一つは剛体に固定され、剛体の運動とともに動く運動座標系  $O' - x'y'z'$  である。このとき  $O' - x'y'z'$  の原点  $O'$  は剛体の質量中心に固定する。

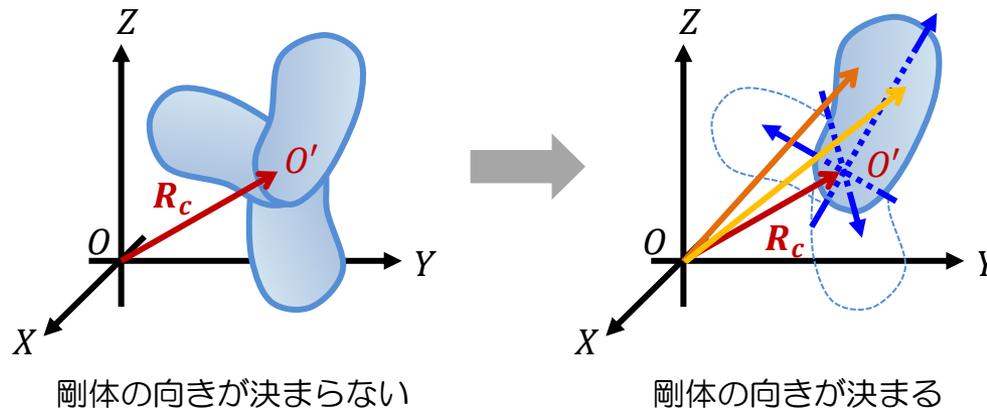


このように座標系を設定すれば、静止座標系に対する剛体の位置は、運動座標系の位置と方向を決めることで自動的に決まる。



## 9. 2. 剛体の運動

$O'$ の位置ベクトルを $R_c$ で表す。この $R_c$ によって剛体の質量中心の位置は決まるが、剛体がどの方向を向いているか？は決まらない。本来なら剛体内の質量中心を除く残り二点の位置が決まらない限り、剛体の向きは決まらない。そのため、剛体の向きを含めた位置の決定には9個の座標成分が必要となる。しかし、剛体はその内部の相互間距離が不変、という拘束条件があるため、3つの座標成分は自動的に決まる。別の言い方をすれば、剛体の位置が一点決まればあとは方向を拘束できれば良い。このとき、静止座標系3軸に対して方角が決まればよいので3つの角度が必要となる。従って、剛体の向きを含めた位置の決定には6個の座標成分があれば十分である。このように剛体を自由に動かすときに必要となる座標成分の数を“自由度”と呼ぶ。



## 9. 2. 剛体の運動

剛体内の質量中心を除く任意の点Pの位置について、運動座標系から見た位置ベクトルを $\mathbf{r}$ 、静止座標系から見た位置ベクトルを $\mathbf{R}$ で表す（前図参照）。この点Pの変位は、運動座標系の変位と、運動座標系まわりの回転によって生じる変位の和で決まる。

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_c + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad \dots (9.2 - 1)$$

これを両辺微小時間 $dt$ で割れば、速度の関係式が得られる。

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \dots (9.2 - 2)$$

$\mathbf{V}_c$ は剛体の質量中心の並進速度、 $\boldsymbol{\omega}$ は剛体の回転の角速度である。

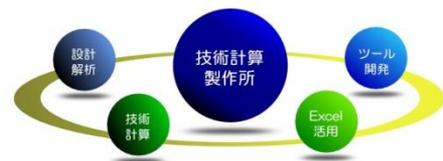
ところで、今までは剛体の運動を質量中心を基準に話をしたが、剛体に固定した別の点 $O''$ を基準にするとどうなるだろうか？

$O''$ を $O'$ から位置ベクトル $\mathbf{a}$ の位置に設定する。なお、 $O''$ は剛体の外にとっても構わない。 $O''$ からみたPの位置ベクトルを $\mathbf{r}'$ で表すと、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \quad \dots (9.2 - 3)$$

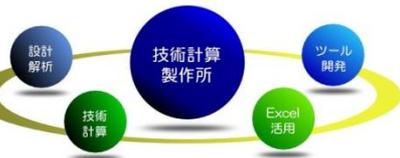
となるから、(9.2-2)式に代入して次の関係を得る。

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad \dots (9.2 - 4)$$



## 9. 2. 剛体の運動

この式から、点 $O'$ の速度は $V_c + \omega \times a$ であり、 $O'$ まわりの転によって生じる変位は $\omega \times r'$ となる。ということは、剛体の角速度はどこを基準にとっても $\omega$ で回転する、つまり「剛体の角速度は基準点の選び方に無関係」ということになる。



## 9. 3. 慣性テンソル

本節では、次節で見る剛体の運動方程式の“質量”にあたる概念“慣性テンソル”について見ることにする。面倒な計算が多いので退屈だが、非常に重要な概念なのでその物理的な意味についてはよく理解してほしい。

さて前節(9.2-2)式で見たように、剛体内の任意の点の速度は、その質量中心の速度 $V_c$ と質量中心を基準とした回転変位に基づく速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ で構成される。

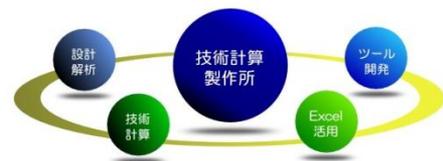
$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad \dots (9.3 - 1)$$

剛体の運動エネルギーは質点系の運動エネルギーをそのまま適用できるので、上式を代入して

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} M V_c^2 + \sum_i m_i \mathbf{V}_c \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

を得る。ここで右辺第二項は(8.5-6)式 $\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ を考慮すると0になる。

$$\sum_i m_i \mathbf{V}_c \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = (\mathbf{V}_c \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$



## 9. 3. 慣性テンソル

さらに、右辺第三項は次のように変形できるので、

$$\sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_i m_i \{ \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \}$$

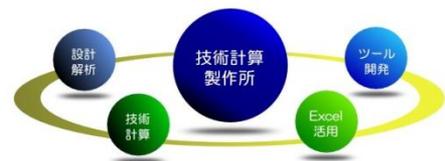
剛体の運動エネルギーは次のようになる。

$$K = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \{ \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \} \quad \dots (9.3 - 2)$$

右辺第一項は質量中心の並進運動エネルギーであり、第二項は質量中心まわりの回転運動エネルギーである。ここで、回転運動エネルギーの項に着目し、次の式変形を行う。

$$2K_{rot} = \sum_i m_i \{ \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \} = \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \quad \dots (9.3 - 3)$$

$\omega^2 = \omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2$ 、 $r_i^2 = x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2$ 、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i = \omega_{x'} x_i' + \omega_{y'} y_i' + \omega_{z'} z_i'$ を考慮に入れて、頑張っって地道に計算すると（とんでもなく面倒なので結果だけ受け入れればよい）、



## 9. 3. 慣性テンソル

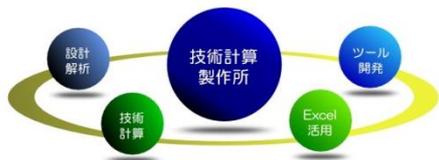
$$\begin{aligned}
 K_{rot} &= \sum_i m_i \{ (y'_i{}^2 + z'_i{}^2) \omega_{x'}^2 + (z'_i{}^2 + x'_i{}^2) \omega_{y'}^2 + (x'_i{}^2 + y'_i{}^2) \omega_{z'}^2 \} \\
 &\quad - 2 \sum_i m_i (x'_i y'_i \omega_{x'} \omega_{y'} + x'_i z'_i \omega_{x'} \omega_{z'} + y'_i z'_i \omega_{y'} \omega_{z'}) \\
 &= \sum_i m_i \{ (y'_i{}^2 + z'_i{}^2) \omega_{x'} - x'_i y'_i \omega_{y'} - x'_i z'_i \omega_{z'} \} \omega_{x'} \\
 &\quad + \sum_i m_i \{ (z'_i{}^2 + x'_i{}^2) \omega_{y'} - y'_i x'_i \omega_{y'} - y'_i z'_i \omega_{z'} \} \omega_{y'} \\
 &\quad + \sum_i m_i \{ (x'_i{}^2 + y'_i{}^2) \omega_{z'} - z'_i x'_i \omega_{z'} - z'_i y'_i \omega_{y'} \} \omega_{z'} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i \{ (y'_i{}^2 + z'_i{}^2) \omega_{x'} - x'_i y'_i \omega_{y'} - x'_i z'_i \omega_{z'} \} \\ \sum_i m_i \{ (z'_i{}^2 + x'_i{}^2) \omega_{y'} - y'_i x'_i \omega_{y'} - y'_i z'_i \omega_{z'} \} \\ \sum_i m_i \{ (x'_i{}^2 + y'_i{}^2) \omega_{z'} - z'_i x'_i \omega_{z'} - z'_i y'_i \omega_{y'} \} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 9. 3. 慣性テンソル

ここで前のベクトルに着目すると、

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \sum_i m_i \{ (y_i'^2 + z_i'^2) \omega_{x'} - x_i' y_i' \omega_{y'} - x_i' z_i' \omega_{z'} \} \\ \sum_i m_i \{ (z_i'^2 + x_i'^2) \omega_{y'} - y_i' x_i' \omega_{y'} - y_i' z_i' \omega_{z'} \} \\ \sum_i m_i \{ (x_i'^2 + y_i'^2) \omega_{z'} - z_i' x_i' \omega_{z'} - z_i' y_i' \omega_{y'} \} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と出来る。



## 9. 3. 慣性テンソル

以上より、剛体の回転運動エネルギーは次のようになる。

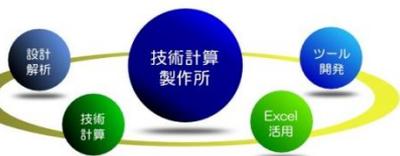
$$K_{rot} = \frac{1}{2} (I\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \dots (9.3 - 4)$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad \dots (9.3 - 5)$$

ここで定義された $I$ を“慣性テンソル”、その対角成分である $I_{xx}$ 、 $I_{yy}$ 、 $I_{zz}$ を“慣性モーメント”、非対角成分を“慣性乗積”と呼ぶ。定義より明らかのように $I$ は対称形である。

定義からわかるように、慣性モーメントは非負の値をとる。また、慣性乗積は正、負、0のどれでもよいので、一般に角運動量ベクトル $L$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は平行ではない。



## 9. 3. 慣性テンソル

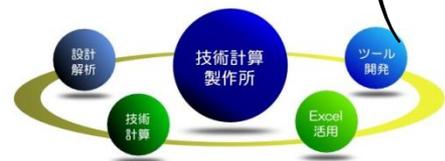
なお剛体を質点の集まりとしてみたので、慣性テンソル成分の定義式は $\Sigma$ 形式で表現したが、積分形式で見の方が本質的である。このとき、 $\rho$ を物体の質量密度とする。

$$I_{xx} = \int_V \rho(y^2 + z^2)dV, \quad I_{xy} = - \int_V \rho xy dV, \quad \text{他成分も同様} \quad \dots (9.3 - 6)$$

さて、慣性テンソル $I$ は一般に非対角成分を持つが、座標系の方向に適当なものを選べば対角型に変形できる。この変形は行列の固有値に関する知識を必要とする。ここは数学による演算の話なので詳細は線型代数のページに委ねるとして、結果をいきなり紹介する。どうしても気になる場合は「行列の対角化」でググるなり、参考書で調べるなりしてほしい。

対角化できる座標系の軸を $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ とし、その時の慣性テンソルは以下で表せる。

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \rho(x_2^2 + x_3^2)dV & 0 & 0 \\ 0 & \int \rho(x_3^2 + x_1^2)dV & 0 \\ 0 & 0 & \int \rho(x_1^2 + x_2^2)dV \end{pmatrix} \dots (9.3 - 7)$$



## 9. 3. 慣性テンソル

このときの座標軸を“**慣性主軸**”と呼び、それに対応するテンソルを“**主慣性テンソル**”、対角成分の値を“**主慣性モーメント**”と呼ぶ。

このとき、剛体の回転運動エネルギーは簡単になる。

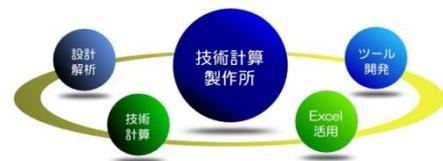
$$K_{rot} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad \dots (9.3 - 8)$$

主慣性モーメントの特徴として、主慣性モーメントのどれか1つが他の2つの合計よりも大きくなることはない。例えば、

$$I_1 \leq I_2 + I_3 \quad \rightarrow \quad \sum m_i (x_{2i}^2 + x_{3i}^2) \leq \sum m_i (2x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2)$$

また、主慣性モーメントの大小によって次の3つに分類される。

- (1) 主慣性モーメントはどれも等しくない : 非対称コマ
- (2) 2つの主慣性モーメントが等しい : 対称コマ
- (3) 3つの主慣性モーメントが等しい : 球状コマ



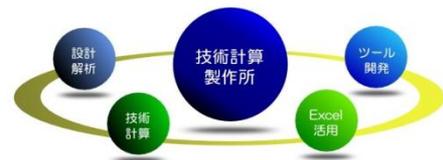
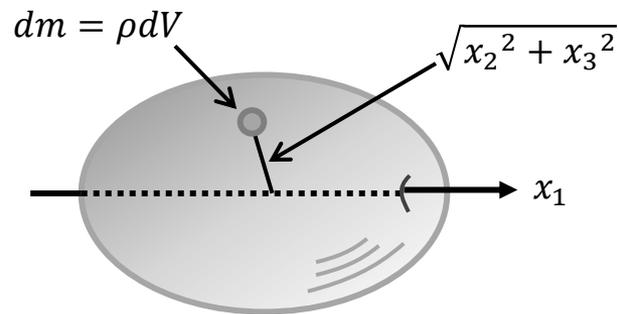
## 9. 3. 慣性テンソル

ここまでくるのにえらく時間がかかったが、実はまだ慣性テンソル、特に慣性モーメントの物理的な意味について具体的な説明を何もしていない。ここでは主慣性モーメントを用いて、慣性モーメントの意味について説明する。

$x_1$  軸まわりの主慣性モーメントは

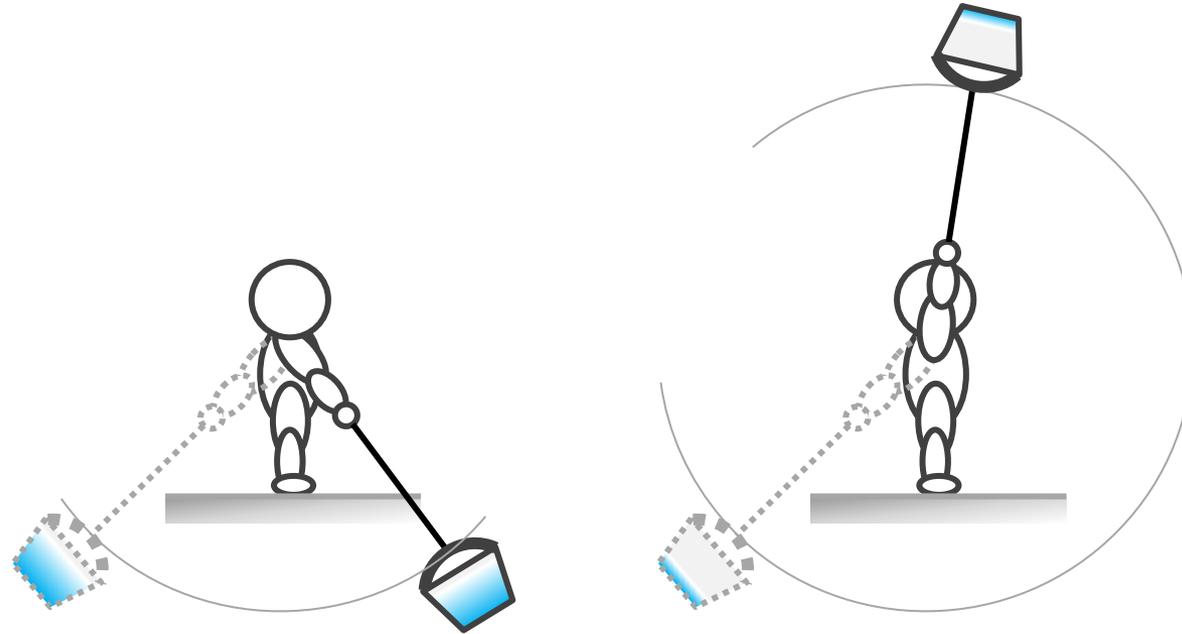
$$\int \rho(x_2^2 + x_3^2) dV$$

である。これは、剛体内の任意の点Pと $x_1$  軸との距離の二乗に、点Pの質量の重みを与えたものを全体積で積み上げたものである。これは8.3節でみたモーメントの定義に当てはまる。さらに、重みとしているのは「質量 = 慣性の大きさを示す値」であるから、“**慣性モーメント**” という名称はまさにぴったりである。慣性モーメントは慣性能率とも呼ばれる。



## 9. 3. 慣性テンソル

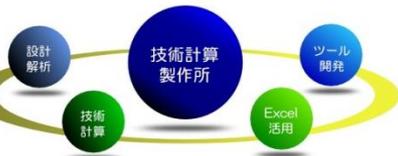
定義から、重い部分が回転軸から遠ければ遠いほど慣性モーメントは大きくなる。これはバケツにひもをつけてぶん回すとき、水をいっぱい入れると回しにくく、回り出すと止めにくいことから、回転運動に対する慣性の性質をそのまま表している。



重くてなかなか回らない

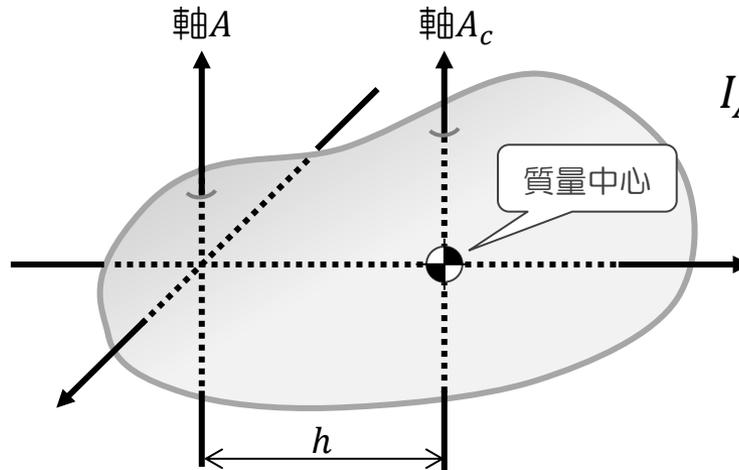
軽いので簡単に回る

慣性乗積（非対角成分）については、次節、剛体の運動方程式のところの説明する。



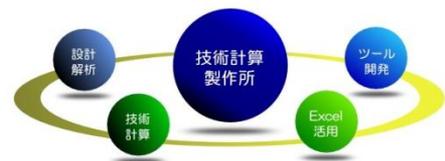
## 9. 3. 慣性テンソル

慣性モーメントには“**平行軸の定理**”というものがある。これは、下図の軸Aまわりの慣性モーメントを $I_A$ 、それに平行で質量中心を通る軸 $A_c$ まわりの慣性モーメントを $I_{Ac}$ とすると、次に示す通りのものである。剛体全体の質量は $M$ とする。



$$I_A = I_{Ac} + Mh^2 \quad \dots (9.3 - 9)$$

言葉で言えば、「ある直線Aに関する剛体の慣性モーメント $I_A$ は、質量中心を通るAに平行な直線 $A_c$ に関する慣性モーメント $I_{Ac}$ と、全質量 $M$ が質量中心に集中した時の、直線Aに関する慣性モーメントとの和に等しい」、というものである。



## 9. 4. 剛体の運動方程式

剛体の運動を決定するには、9.2節で見たように、剛体の基準点の運動と、基準点まわりの回転運動の2つを特定する必要がある。このとき、6個の座標成分（6自由度）の時間変化を定める6個の方程式が必要となる。剛体の基準点の運動は並進運動として2.5節で示した運動方程式を、基準点まわりの回転運動は8.3節で示した力の回転に対する運動方程式をそれぞれ解かなければならない。

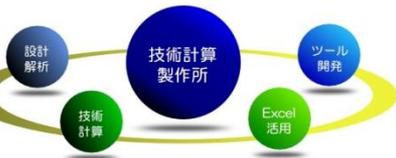
$$\text{基準点の並進運動：} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \text{基準点まわりの回転運動：} \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

剛体内のすべての点は基準点まわりに速度  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$  で運動するので、剛体の角運動量は次のようになる。

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i \{ r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i \} \quad \dots (9.4 - 1)$$

ここで剛体の基準点まわりの回転運動エネルギー（9.3-3）式について、ちょっとした式変形を行う。

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 - \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \{ r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i \} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\} \dots (9.4 - 2)$$



## 9. 4. 剛体の運動方程式

両式を比較すると、

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \dots (9.4 - 3)$$

となることがわかる。これを (9.3-3) 式と比較すると、

$$K_{rot} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \dots (9.3 - 3)$$

角運動量  $\mathbf{L}$  は慣性テンソル  $\mathbf{I}$  と角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  で表せることがわかる。

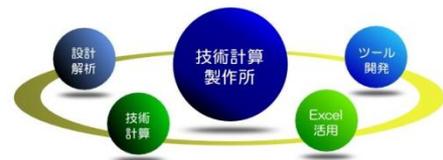
$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad \dots (9.4 - 5)$$

これを回転の運動方程式に代入すると、あたかも運動方程式と同形のものが得られる。

$$\mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N} \quad \dots (9.4 - 6)$$

ちなみに、運動方程式も質量テンソルという形で表現可能であり、それと剛体の回転運動方程式を見比べると、本当に同じ形をしている。

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$



## 9. 4. 剛体の運動方程式

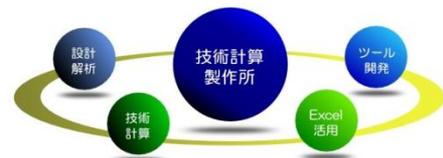
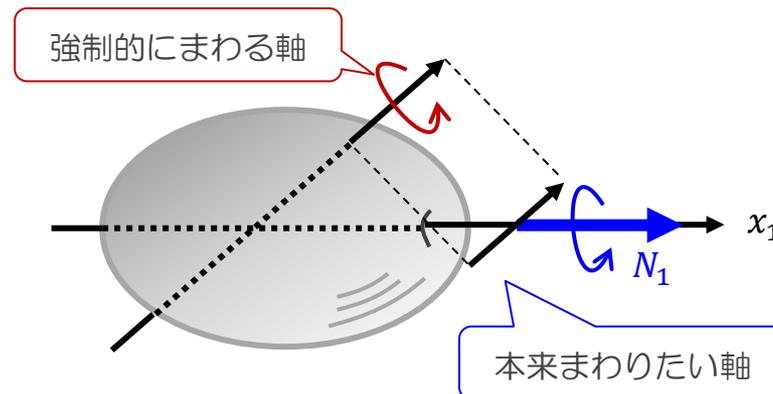
上式に回転運動の成分表示があるので、慣性乗積について説明する。  
主慣性モーメントの場合、力のモーメントとの関係は

$$N_1 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \quad \dots (9.4 - 7)$$

であり、力のモーメントは100%主軸まわりの回転に用いられる。  
それに対し、慣性テンソルの非対角成分である慣性乗積があることで、例えばx軸方向の力のモーメントがy軸回転にも一部働くことになる。

$$N_x = I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + I_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} \quad \dots (9.4 - 8)$$

これは、剛体を自由に回転させたとき、本来なら慣性主軸まわりに回転を行うのだが、  
回転軸がずれたせいで、回転軸まわりの力のモーメントが他軸成分に加わったためである。



## 9. 4. 剛体の運動方程式

ただし、運動方程式と回転の運動方程式では違うところもある。

- (1) 運動方程式では運動量 $p$ と速度 $v$ は必ず平行であるが、角運動量 $L$ と角速度 $\omega$ は平行ではない。
- (2) 質量 $m$ はスカラーのため座標系に依存せず一定であるが、慣性テンソル $I$ の成分は座標系に依存してその値を変える。

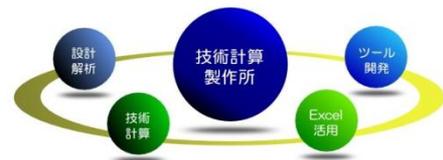
(1) については、慣性主軸をとることで角運動量 $L$ と角速度 $\omega$ は平行にできる。

(2) については、剛体に固定され一緒に回転する座標系を考えることで $I$ を一定にできる。

(2) の問題を解消したのが“オイラーの運動方程式”である。

空間に固定した静止座標系と、剛体に固定した回転座標系の2つを用意する。今、静止座標系における任意のベクトル $A$ の時間変化 $dA/dt$ について、 $A$ が回転座標系に対して変化しなければ、 $dA/dt$ は回転のみによって生じている。

$$\frac{dA}{dt} = \omega \times A$$



## 9. 4. 剛体の運動方程式

今度は回転系から見て任意のベクトル $A$ に変化があったとすると、その変化分を上式に加えなければならない。その変化は回転系に対してのものであるから静止系の変化と区別して $d'A/dt$ で表すことにする。

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times A \quad \dots (9.4 - 10)$$

ここで $A$ に角運動量ベクトル $L$ をあてはめると、左辺は力のモーメント $N$ になるので

$$N = \frac{d'L}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times L \quad \dots (9.4 - 11)$$

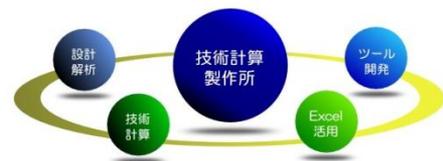
今、回転座標系の3軸を慣性主軸 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ と一致させれる。このとき次の二つの条件

(1)  $L_i = I_i \omega_i (i = 1, 2, 3)$

(2) 剛体の角速度は基準点の選び方に無関係 (9.2節による) ( $d'\boldsymbol{\omega}/dt = d\boldsymbol{\omega}/dt = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ ) を考慮して、上式の成分表示は次のようになる。

$$\begin{aligned} N_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ N_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ N_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad \dots (9.4 - 12)$$

この式を“オイラーの運動方程式”と呼ぶ。



## 9. 4. 剛体の運動方程式

ここで一つ、オイラーの運動方程式の例を見てみよう。  
 対称コマが固定点まわりで外力モーメント $N$ の作用なしに回転運動しているとする。回転座標系は剛体と一緒に動くので慣性テンソルは定数である。いま、対称コマであるから $I_1 = I_2 = I_c$ とにおいて

$$\begin{aligned} 0 &= I_c \dot{\omega}_1 - (I_c - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ 0 &= I_c \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_c) \omega_3 \omega_1 \quad \dots (9.4 - 13) \\ 0 &= I_3 \dot{\omega}_3 \end{aligned}$$

となり、上記第3式から $\omega_3$ は定数となる。ここで定数を明示的にして、

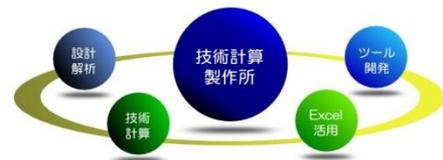
$$\omega_3 = \omega_n, \quad \beta = \frac{I_3 - I_c}{I_c}$$

とおけば

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\omega}_1 + \beta \omega_n \omega_2 \\ 0 &= \dot{\omega}_2 - \beta \omega_n \omega_1 \end{aligned}$$

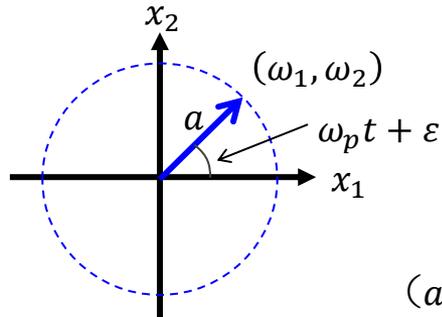
となる。この第一式を $t$ で微分したのち $\omega_2$ を消去すると $\omega_1$ の二階常微分方程式となる。

$$\ddot{\omega}_1 = -(\beta \omega_n)^2 \omega_1 \quad \dots (9.4 - 14)$$



## 9. 4. 剛体の運動方程式

この微分方程式の解は、6.1節の単振動のところで見た解と同じである。ただし、回転方向は $\beta > 0$ つまり $I_3 > I_c$ のとき反時計回り、 $\beta < 0$ つまり $I_3 < I_c$ のとき時計回りとなる。



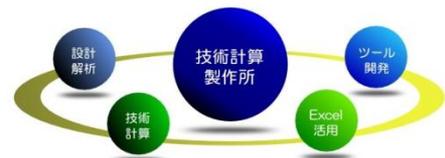
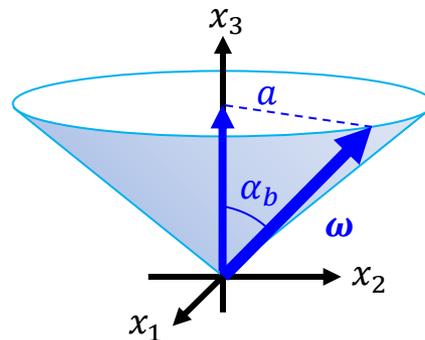
$$\omega_p = \beta \omega_n$$

$$\omega_1 = a \cos(\omega_p t + \varepsilon) \quad \dots (9.4 - 15)$$

$$\omega_2 = a \sin(\omega_p t + \varepsilon)$$

( $a$  : 振幅、 $\omega_p$  : 軸に垂直な平面上の角速度、 $\varepsilon$  : 位相)

このとき、角速度ベクトル $\omega$ は $x_3$ 軸との傾きを一定に保ちながらそのまわりを回転する。このような運動を“**才差運動**”と呼ぶ。 $\omega_n$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ は初期条件で決まる。このとき、回転座標に対し $\omega$ が掃引する軌跡は円錐面を描く。この円錐面の半頂角は $\tan \alpha_b = a/\omega_n$ である。

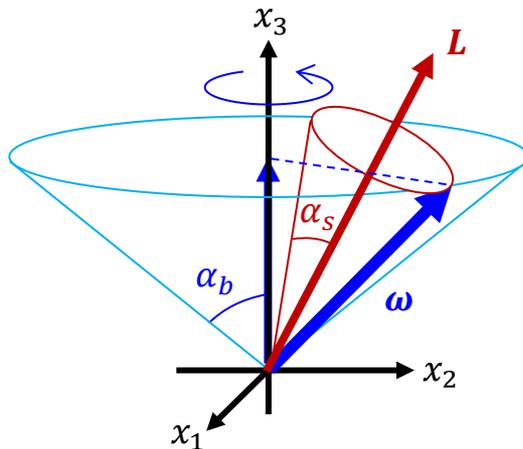


## 9. 4. 剛体の運動方程式

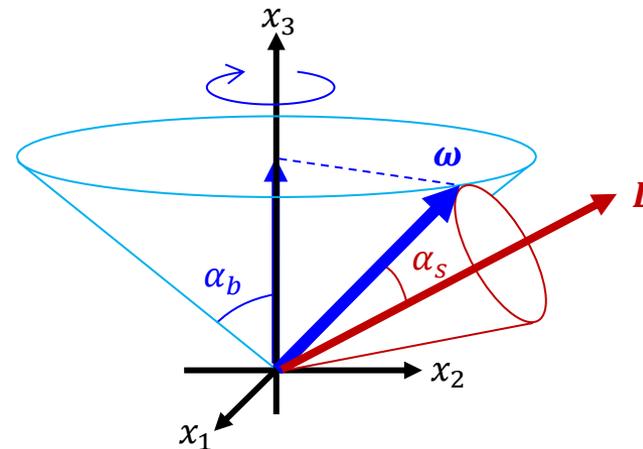
次に、静止座標系から角速度ベクトル $\omega$ の軌跡を追う。今前提として外力モーメント $N$ を0としているので角運動量ベクトル $L$ は一定である。この $L$ と $\omega$ の成す角 $\alpha_s$ は以下で表せる。

$$\cos \alpha_s = \frac{\omega \cdot L}{|\omega||L|} = \frac{2K_{rot}}{\omega L} \quad \dots (9.4 - 16)$$

$K_{rot}$ は剛体の回転運動エネルギーである。 $\omega$ 、 $L$ 、 $K_{rot}$ は時間に対して一定であるから $\alpha_s$ も一定である。この結果、静止座標系に対しても $\omega$ は円すい面を描くことになる。円すい面の描き方は $\beta$ の正負で変わる。



$\beta > 0$ のとき



$\beta < 0$ のとき

## 9. 4. 剛体の運動方程式

ここで剛体の回転運動エネルギーに戻る。

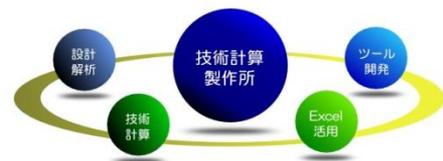
今、剛体の質量中心は静止しているとする。このとき剛体は回転運動のみ生じている。ここで(9.4-6)式の両辺に角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の内積をとると(4.3節の運動エネルギーと同じことをする)、

$$I\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \cdot \mathbf{N} \quad \dots (9.4 - 17)$$

左辺は $K_{rot}$ の時間微分であるから右辺は力のモーメントによる仕事率となる。これを両辺時間で積分すれば、力のモーメントによる仕事を得られる。

$$K_{rot}(\boldsymbol{\omega}_1) - K_{rot}(\boldsymbol{\omega}_0) = \int_{\boldsymbol{\theta}_0}^{\boldsymbol{\theta}_1} \mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad \dots (9.4 - 18)$$

力のモーメントはもともと単位が[N・m]である。 $\theta$ は[rad]であるがこれは無単位として扱われる(ラジアンは円周率との比率という意味)。



## 9. 5. 剛体の簡単な運動例

---

作成中

