8. 質点系の運動

8．1．質点と質点系

今まで物体の運動は、そのまま“物体”という言葉で表していた。しかしそこには次の前提が暗に含まれていた。

物体の大きさや形は無視し、**質**量を持った**点**として扱う

さまざまな物体　　　　質量を持った点

このような点を**“質点”**と呼ぶ。
今まで見てきた物体の運動について、式や説明の中に物体の形や大きさは一言も触れられていない。出てきたのは質量だけである。

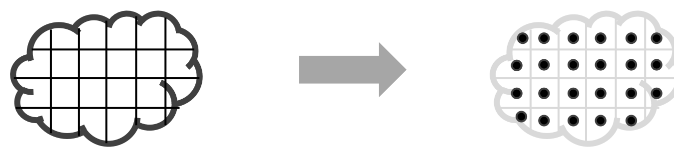
なぜこのような扱いができるのか？

それは、物体の運動を論じる上で最も重要なのは質量であり、大きさや形を無視してもその本質を十分理解できるからである。例えば、太陽のまわりをまわる惑星たちの運動も、大きな質量を持った点として扱えば、どうして楕円軌道を描くのかを十分に説明できた。実は今まで**“物体”**と呼んでいたものは**“質点”としてすべて読み替えられる**。

8. 1. 質点と質点系

しかし実際の物体は、運動中変形したり自転したりと、その大きさや形が無視できない現象が起きている。ということでいえば、今までの物体の運動の話は**「理想化された近似」**といえる。より精度の高い予測が必要なとき、これらは無視できなくなる。

そこで次のような考え方が生まれた。
物体の大きさや形を考慮して運動を論じる場合、物体を微小な質量を持った点（まさに質点）に分解して、各質点の運動を捉え、それを形に合わせて積分すればよい。

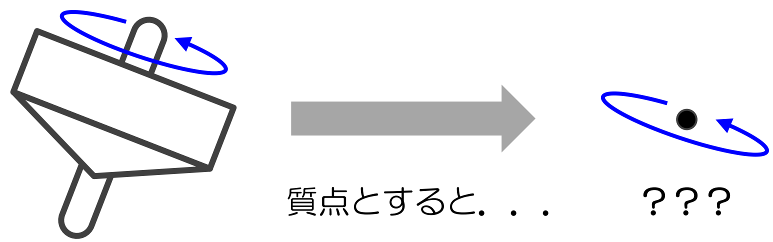


このように、**多数の質点の集まり**によって構成される**「システム = 系」**の運動を扱うとき、その系を**“質点系”**と呼ぶ。

質点系だからと言って何か新しい法則が必要になるわけではない。今までどおり**“ニュートンの運動の三法則”**をもとに説明できる。話を進めれば進めるほど、このシンプルなニュートンの運動の三法則がいかにすごいか！！がわかると思う。

8. 2. 回転に対する運動の法則

これまでニュートンの運動の三法則を質点の運動にのみ適用してきた。しかし、物体には大きさや形が存在するため、質点だけで力学を扱うのには限界がある。特に、物体自身の回転運動 = 自転については質点で語ることはできない。例えば、コマが回っているところを想像してみよう。点自身の自転って？？？点なので表現できない。

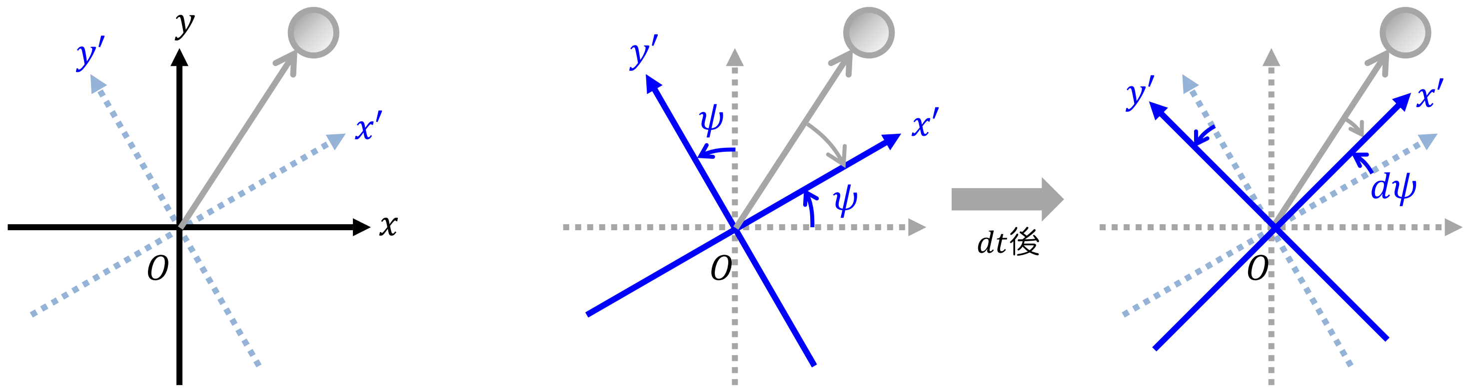


となると、回転運動に対して何かしらの新しい法則を見出す必要があるのではないか？と思いがちである。しかし後述する **“モーメント”** という概念を導入することで、ニュートンの運動の三法則は回転運動にも拡張できる。

本節では、回転運動に対しニュートンの運動の三法則が拡張できることについての説明を行う。

8. 2. 回転に対する運動の法則

まずはじめに、原点を共通とする2つの座標系Oa、Obがあって、Oaは静止し、Obは原点Oを中心に反時計回りに角速度ω_ψで回転しているとする。
いま、座標系Oaに対して静止している物体があるとする。その物体をObから見ると、時計回りに角速度ω_ψで回転していることになる。

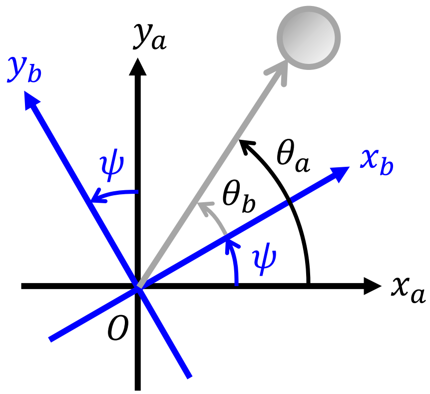


Oaからみたとき　　Obからみたとき

ところで、2.4節の慣性の法則は座標系の平行移動についての法則であった。これに対応して座標系の回転について同様なことがいえないか確認する。

8．2．回転に対する運動の法則

まず、座標系OaとObの間には次の関係が成り立つ。



$$\theta_a = \theta_b + \psi$$
$$\omega_a = \omega_b + \omega_\psi \qquad \cdots(8.2-1)$$

座標系Oa、Obからみた物体の運動を極座標で表すと、どちらも同じ形になる。

$$\boldsymbol{r_i} = r\boldsymbol{e_{ri}}$$
$$\boldsymbol{v_i} = \dot{r}\boldsymbol{e_{ri}} + r\omega_i\boldsymbol{e_{\theta i}} \qquad (i = a, b) \quad \cdots(8.2-2)$$
$$\boldsymbol{a_i} = (\ddot{r} - r{\omega_i}^2)\boldsymbol{e_{ri}} + (2\dot{r}\omega_i + r\dot{\omega}_i)\boldsymbol{e_{\theta i}}$$

ここで、次の二つの条件を与える。

（1）座標系ObはOaに対して等角速度運動（等速円運動）している。
（2）物体は原点Oを中心に円運動している。

8. 2. 回転に対する運動の法則

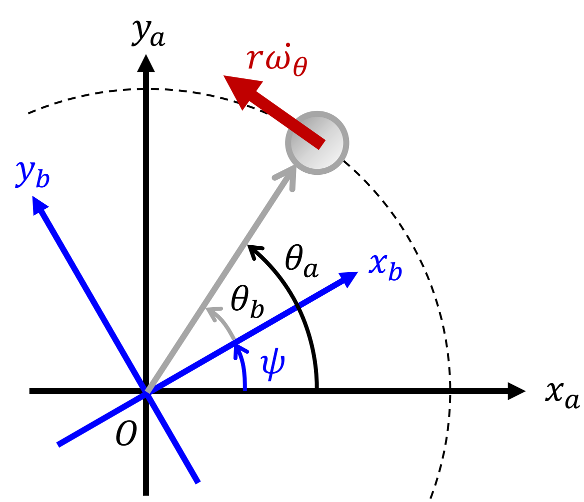
すると、$\dot{\omega_\psi} = 0$、$\dot{r} = 0$の拘束条件が加わる。これらを考慮に入れたとき、（8.2-1）式から$\dot{\omega_a} = \dot{\omega_b} = \dot{\omega_\theta}$となるので、座標系Obからみた物体の加速度は

$$\boldsymbol{a_b} = -r\left(\omega_a - \omega_\psi\right)^2 \boldsymbol{e_{rb}} + r\dot{\omega_\theta}\boldsymbol{e_{\theta b}} \quad \cdots(8.2-3)$$

である。同様に座標系Oaからみたときの加速度は

$$\boldsymbol{a_a} = -r{\omega_a}^2 \boldsymbol{e_{ra}} + r\dot{\omega_\theta}\boldsymbol{e_{\theta a}} \quad \cdots(8.2-4)$$

となる。「$\boldsymbol{a_a}$と$\boldsymbol{a_b}$の違いは向心力だけ」である。向心力は物体の運動を力の中心に向けるもので、円運動の速度変化に寄与しない。
これは、回転運動（円運動）について、2.4節の慣性の法則と同様な関係が得られたことになる。



８．３．回転に対する運動の法則

次に、運動の法則と作用反作用の法則に対応するものがないか調べてみよう。

5.4節で見た面積速度に戻ると．．．！！両辺に質量の2倍を掛けるとなんだか運動量っぽいパラメータが導入できそうである（2倍するのは分数を消すことにある。単に比例定数が変わるだけなので、力学的な影響はない）。

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \quad \rightarrow \quad 2m\boldsymbol{h} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \quad \cdots (8.2-5)$$

右辺の質量mの順序を入れ替えれば、位置ベクトルと運動量ベクトルの外積で表せる。

$$\boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{L} \quad \cdots (8.2-6)$$

このようにして導入したベクトル$\boldsymbol{L}$を **“角運動量”** と呼ぶ。
ここで、運動の法則（第二法則）を思い浮かべてほしい。運動量の時間微分は力と等しい。そこで（8.2-5）式の時間変化を計算してみると次式が得られる。

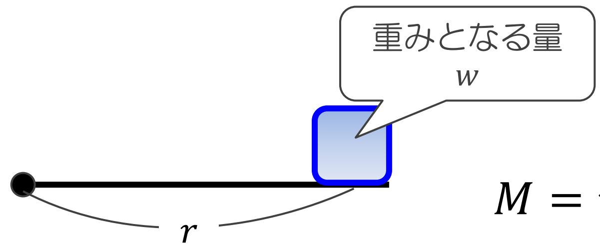
$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} \quad \cdots (8.2-7)$$

運動量は速度ベクトルを含むため、同じ方向のベクトルの外積は0であることを用いた。
実はまだ式変形をしただけで、力学的な意味合いについて何も語っていない。
そこで$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$の力学的な意味について確認する。

8．2．回転に対する運動の法則

ここで一つ、これから先の話をする上で必要となる言葉の定義をしておきたい。
それは“モーメント”である。

“モーメント”とは「距離に何等かの量の重みづけを与えたもの」である。与え方はただの掛け算や、重みに乗数を与える、ベクトルの外積で掛ける、などさまざまである。



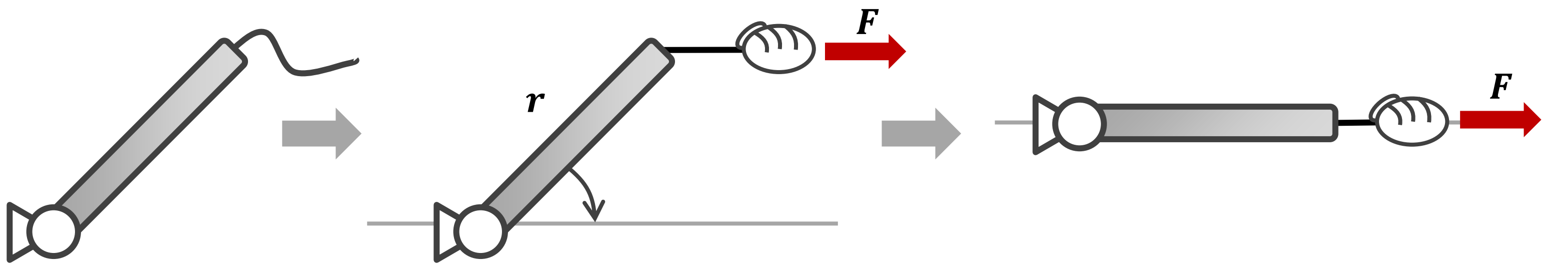
$$M = rw$$

モーメントの概念は物理だけでなく、様々なところで用いられる。例えば統計で扱う分散や歪度、尖度などはそれぞれ二次、三次、四次モーメントと呼ばれている（あくまで例を挙げただけなので、その意味はココでは割愛する）。

今回の$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{N}$で言えば、位置（距離を含む）$\boldsymbol{r}$に$\boldsymbol{L}$は運動量$\boldsymbol{P}$を、$\boldsymbol{N}$は力$\boldsymbol{F}$の重みを付けたものと言える。従って、$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}$を角運動量のほかに“運動量モーメント”と呼び、$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$を“力のモーメント”または“トルク”と呼ぶ。

8．2．回転に対する運動の法則

さて、次のような実験をしてみよう。
棒の片端を固定し回転のみ許される状態とし、もう片端に糸をつけておく。
この糸を「せ～の」で一定の力$\boldsymbol{F}$で引っ張ると、棒は固定点まわりに回転し、水平になるとその動きを止める。このとき、棒上の点は固定点を中心に円運動することになる。



Step1（回転）　　Step2（静止）

仮に棒を**質点**とみれば、運動方程式によりStep1はつり合い状態となり運動しないことになるが、これは現実と異なる。棒はそもそも点ではないので自分自身の回転 = 自転を扱う場合、質点では表現できない。
ここで先ほど導入した力のモーメント$\boldsymbol{N}$の出番である。$\boldsymbol{N}$と面積速度$\boldsymbol{h}$の関係は、（8.2-5）（8.2-7）式から得られる。

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 2m\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} \quad \cdots (8.2-8)$$

８．２．回転に対する運動の法則

円運動上の物体の速度は（5.2-6）式の$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$である。この速度を面積速度の式に代入し、$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{\omega}$は直交することを考慮に入れて

$$2\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}=r^2\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{h}=\frac{1}{2}r^2\boldsymbol{\omega}\quad\cdots(8.2-8)$$

が得られる。つまり、円運動では面積速度$\boldsymbol{h}$と角速度$\boldsymbol{\omega}$は比例する。

あともう一つ、復習として外積の特徴について振り返る。
外積の特徴として「同一方向のベクトル同士の外積は0」である。つまり、$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{F}$が平行でないとき力のモーメントは$\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$であり、$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{F}$が平行なとき$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}$になる。

$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\neq\boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$

8．3．回転に対する運動の法則

ここで、先ほどの実験に戻る。

Step1）$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{F}$は平行でないため$\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$である。よって面積速度は一定ではない。そのため、棒は強さを変えながらの回転運動をしている。

Step2）$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{F}$は平行なため$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$になる。よって面積速度は一定、つまり角速度一定であり、棒は等速円運動を行う（静止は速度0の等速円運動）。ところで、棒に加えている力$\boldsymbol{F}$は一定であるからその向きを変えない。それに加え、力$\boldsymbol{F}$は棒と同一直線上にあるため固定点に反作用力$\boldsymbol{F}$が働く。これにより、棒のすべての点はつり合い状態となり、どこにも動けない。つまり棒は静止することになる。

この話の中には、“運動の法則”と“作用反作用の法則”の拡張が含まれている。

8. 2. 回転に対する運動の法則

まずは“運動の法則”について。（8.2-7）式をもう一度見ると、左辺は力のモーメント、右辺は角運動量の時間変化である。これは運動方程式（2.5-2）式の関係と同じである。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad \cdots (8.2-7)$$

運動方程式の力$\boldsymbol{F}$に対応するのが力のモーメント$\boldsymbol{N}$、運動量$\boldsymbol{P}$に対応するのが角運動量（運動量モーメント）$\boldsymbol{L}$である。また、Step1）で見たようにこの式から得られる運動は回転運動である。従って、この式は**回転運動に対する運動の第二法則**といってよい。

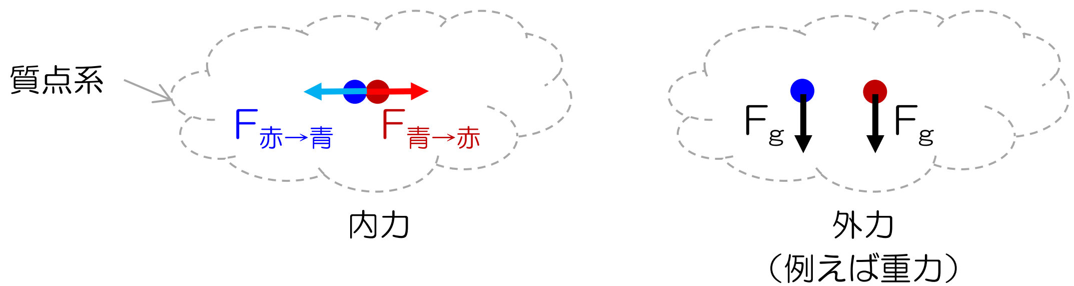
次に、作用反作用の法則について。Step2で「棒が回転を止め静止する条件」として、「棒の両端の力は同一直線状にある」というのがあった。これは**「力の作用線が同一線上になければ、等しい力が加わっても回っちゃうよ」**ということを述べている。
つまり**作用反作用の法則**は**「物体1が物体2に力を及ぼすとき、物体2は物体1に対して同じ大きさで逆向きの力を及ぼし、その作用線は物体1と２を結ぶ直線上にある 」**とするのが正確な表現である。

以上の結果から、**「ニュートンの運動の三法則はモーメントの概念を取り込むことで、回転運動に拡張できる」**。

8. 3. 内力と外力

質点系の運動を論じるときに、各質点に作用する力を次の二つの力に分けて考えると便利な場合が多い。

- **内力**　：対象としている質点系に属する他の質点との相互作用によって働く力
- **外力**　：対象としている質点系の外から各質点に働く力



質点系内の質点同士がぶつかって生じる力は内力、重力などは外力と捉えておけばよい。

内力には一つ特徴がある。それは内力の定義からも明らかなのだが、なにかわかるだろうか？

8．3．内力と外力

それは「質点系内に働くすべての内力を足し合わせると“0”になる」ことである。内力は各質点間の相互作用による力である。相互作用が互いに異なる大きさをとることは作用反作用の法則に反し、あり得ない。つまり、質点iとjの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{r}_j$、各質点間に作用する相互作用力を$\boldsymbol{F}_{ij}$、$\boldsymbol{F}_{ji}$で表せば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} &= \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \quad \cdots (8.3-1)$$

が成立する。これを系全体で足し合わせれば、質点系に対する内力の作用が0であることがわかる。

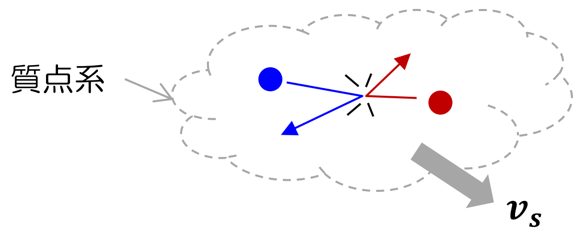
$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} &= \boldsymbol{0} \\ \sum_i \sum_{j \neq i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \quad \cdots (8.3-2)$$

8. 4. 質量中心

n個の質点で構成される質点系について考える。
各質点の運動量を$\boldsymbol{p_i}$とするとき、質点の運動方程式は内力$\boldsymbol{F_{ij}}$と外力$\boldsymbol{F_i}$を考慮して

$$\frac{d\boldsymbol{p_i}}{dt} = \boldsymbol{F_i} + \sum_{j \neq i}^{n} \boldsymbol{F_{ij}} \qquad \cdots (8.4-1)$$

である。これを系全体で足し合わせれば質点系の運動方程式が得られる。このとき、前節の「内力の合計は0」を反映する。



$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\boldsymbol{p_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i} \qquad \cdots (8.4-2)$$

(8.4-2)式は、質点系の中で各質点は自由気ままに動いているが、質点系全体で見ると外力の合計が向いている方に動いている、ということを表している。
このとき、「系全体の運動はいったいどこを基準にとればよいのだろう?」という問題に直面する。

8. 4. 質量中心

それは、各質点の位置$\boldsymbol{r_i}$を用いた次の（8.4-4）式を微分することで解決する。

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r_i}}{M}\quad\cdots(8.4-4)$$

これを両辺時間tで二階微分する。

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d^2\boldsymbol{r_i}}{dt^2}$$

これにより、質点系全体の運動方程式は系全体の速度を$\boldsymbol{V}$で表して、

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\boldsymbol{v_i}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F_i}\quad\cdots(8.4-5)$$

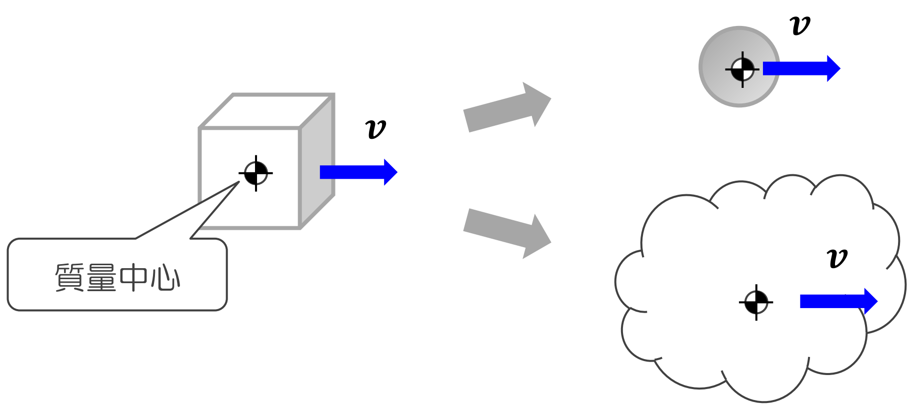
となる。つまり質点系全体の運動は、（8.4-4）式で定義した位置$\boldsymbol{R}$に質量が集中したものとすることで、質点の運動と同じように扱うことができる。この位置$\boldsymbol{R}$を“質量中心”または“重心”と呼ぶ。

8. 5. 運動量保存と角運動量保存

慣性の法則をそのまま数式化したのが**“運動量保存則”**である。
運動量保存則とは「質点系に作用する外力の和が0のとき、系の運動量は変化せず一定に保たれる」ということである。つまり、（8.4-2）式の外力項を0にして

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\boldsymbol{P_i}}{dt}=\boldsymbol{0}\quad\cdots(8.5-1)$$

このとき質点系内の各質点が運動量を保存しなくても、系全体で保存されていれば系全体は質量中心を基準に等速度運動する。ちなみに、質点系は系全体の質量一定（質量保存）が前提である。この前提が守られれば、系の大きさや形は関係ない。このような物体の例として、気体や液体などの流体や、ゴムや金属といった変形する固体などが挙げられる。



形や大きさが変わっても
系としての運動は維持

8. 5. 運動量保存と角運動量保存

質点系は系の広がり（つまり大きさや形）まで考慮できる。従って、質点系自体の回転、つまり自転に対する運動も論じることができる（8.2節で見たとおり）。

質点系内にある各質点の角運動量$\boldsymbol{l_i}$は（8.2-7）式より

$$\frac{d\boldsymbol{l_i}}{dt} = \boldsymbol{r_i} \times \left(\boldsymbol{F_i} + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F_{ij}} \right) \quad \cdots (8.5-2)$$

である。これを系全体で足し合わせると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\boldsymbol{l_i}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i} + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} \quad \cdots (8.5-3)$$

となる。この右辺第二項は作用反作用を考慮して、次のように変形できる。

$$2 \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} = \sum_i \sum_{j \neq i} (\boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} + \boldsymbol{r_j} \times \boldsymbol{F_{ji}}) = \sum_i \sum_{j \neq i} (\boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} - \boldsymbol{r_j} \times \boldsymbol{F_{ij}}) = \boldsymbol{0}$$

従って、系全体の角運動量は外力モーメントの作用のみ影響する。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i} = \sum_i \boldsymbol{N_i} \quad \cdots (8.5-4)$$

8．5．運動量保存と角運動量保存

特に外力モーメントの合計が0のとき、角運動量は不変となり保存される。これを質点系の“**角運動量保存則**”と呼ぶ。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

ここで、質点系の基準を質量中心$\boldsymbol{R}$とし、その周りの角運動量を考えてみよう。
任意の基準からみた質点系内の各質点の位置を$\boldsymbol{r}_i$、質量中心から見た各質点の位置を$\boldsymbol{r}'_i$とすると、次の関係式が成り立つ。

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}、\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{V} \quad \cdots (8.5-5)$$

ここで、質量中心を基準にしたときの質量中心の位置は0なので、次の関係が成り立つ（当たり前といえばそれまでだが）。

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0}、\sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{0} \quad \cdots (8.5-6)$$

8. 5. 運動量保存と角運動量保存

すると、質点系の角運動量は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r'}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{R}) \times (\boldsymbol{v'}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{V}) \\ &= \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \sum_i m_i \boldsymbol{v'}_{\boldsymbol{i}} + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r'}_{\boldsymbol{i}}\right) \times \boldsymbol{V} + \sum_i m_i \boldsymbol{r'}_{\boldsymbol{i}} \times \boldsymbol{v'}_{\boldsymbol{i}} \\ &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} + \sum_i \boldsymbol{r'}_{\boldsymbol{i}} \times \boldsymbol{p'}_{\boldsymbol{i}} \quad \cdots (8.5-7)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L_c} &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{L'} &= \sum_i \boldsymbol{r'}_{\boldsymbol{i}} \times \boldsymbol{p'}_{\boldsymbol{i}}\end{aligned} \quad \cdots (8.5-8)$$

とおけば、$\boldsymbol{L_c}$は「系の質量中心に関する任意の原点まわりの角運動量」、$\boldsymbol{L'}$は「質量中心まわりの角運動量」の意味を持つ。従って、質点系の角運動量変化は$\boldsymbol{L_c}$と$\boldsymbol{L'}$に分解できる。

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L_c} + \boldsymbol{L'} \quad \cdots (8.5-9)$$

8. 5. 運動量保存と角運動量保存

ここで角運動量変化$\boldsymbol{L}'$について、（8.4-2）式の関係を用いて式変形を行う。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} &= \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{F}_i - \frac{d}{dt}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}) \\ &= \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{R} \times \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} \\ &= \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i\end{aligned}$$

これは、$\boldsymbol{L}'$の時間変化は外力の質量中心に関するモーメントの和に等しい。

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \sum_i \boldsymbol{N}_i \quad \cdots (8.5 - 10)$$

以上の結果から**「質量中心の運動、つまり系全体の運動と質量中心まわりの運動は完全に独立に扱う」**ことができる。またこのとき、系全体の運動は座標原点に依存する。

8．6．質点系のエネルギー保存

質点系の運動エネルギーについて、（4.3-3）式を参考に質点系内のすべての質点の運動エネルギーを足し合わせると、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i {v_i}^2\right) = \sum_i \boldsymbol{F_i} \cdot \boldsymbol{v_i} + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F_{ij}} \cdot \boldsymbol{v_i} \quad \cdots (8.6-1)$$

が得られる。

まずは運動エネルギーについて。各質点の速度$\boldsymbol{v_i}$を、質量中心の速度$\boldsymbol{V}$と質量中心に対する速度$\boldsymbol{v'_i}$で表した（8.5-5）式を代入すると（係数の1/2は省略させてもらって）

$$\sum_i m_i {v_i}^2 = \sum_i m_i (V + v'_i)^2 = MV^2 + 2V \sum_i m_i v'_i + \sum_i m_i {v'_i}^2$$

となるが、（8.5-6）式により

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i {v'_i}^2 \quad \leftrightarrow \quad \sum_i K_i = K_{cg} + \sum_i K'_i \quad \cdots (8.6-2)$$

となる。これは角運動量のときと同じように、“質量中心自体の運動$\boldsymbol{K_{cg}}$”と質量中心に対する各質点の運動$\boldsymbol{K' = \sum K'_i}$”に分解できる。

8．6．質点系のエネルギー保存

次に質点系に作用する仕事について。

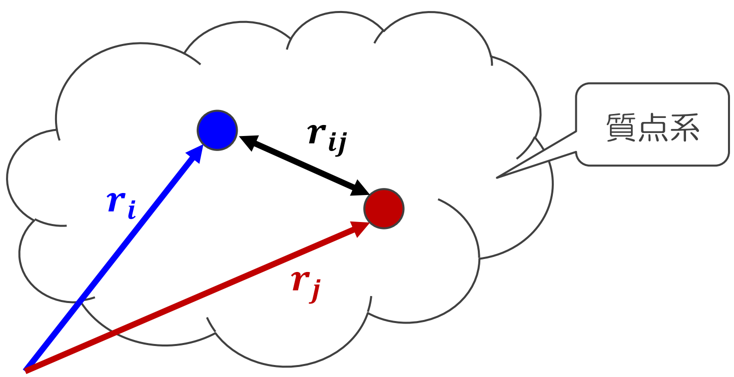
内力に着目する。内力は添え字i、jを入れ替えてもその関係は変えないこと、作用反作用の法則により$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$が成り立つことから、次の関係が得られる。

$$\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i=\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{r}_j=-\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_j$$

この関係を利用して、内力仕事に関する次の式を得る。

$$\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\cdot\left(d\boldsymbol{r}_i-d\boldsymbol{r}_j\right)=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_{ij}\quad\cdots(8.6-3)$$

$d\boldsymbol{r}_{ij}$は質点系内の2つの質点間の相互位置変化を表す。



8. 6. 質点系のエネルギー保存

もし内力$\boldsymbol{F_{ij}}$が質点の相互距離r_{ij}のみの関数であるなら、その大きさを$f_{ij}(r_{ij})$ととって、

$$\boldsymbol{F_{ij}} = f(r_{ij})\frac{\boldsymbol{r_{ij}}}{r_{ij}} = f(r_{ij})\boldsymbol{e_{ij}} \quad \cdots (8.6-4)$$

と表せる。従って（8.6-3）式の内力の仕事は、質点の相互方向の変位に対して行われるので、

$$\boldsymbol{F_{ij}} \cdot d\boldsymbol{r_{ij}} = f(r_{ij})\boldsymbol{e_{ij}} \cdot d\boldsymbol{r_{ij}} = f(r_{ij})dr_{ij}$$

と出来る。これは5.3節の中心力の（5.3-9）式で見たように、内力の大きさ$f(r_{ij})$は関数$U_{ij}(r_{ij})$によって表すことができる。

$$U_{ij}(r_{ij}) = \int_{r_{ij}}^{const} f(r_{ij})dr_{ij} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial r_{ij}} = f(r_{ij}) \quad \cdots (8.6-5)$$

ここで、

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \boldsymbol{F_{ij}} \cdot d\boldsymbol{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \int f(r_{ij})dr_{ij} = -U'' \quad \cdots (8.6-6)$$

とおく。

8. 6. 質点系のエネルギー保存

これにより、質点の距離のみでその大きさが決まる内力による仕事は、経路によらず始点Aの状態と終点Bの状態のみで決まるため、保存力である。

$$\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j}\int_{A}^{B} f(r_{ij})dr_{ij} = U''(A) - U''(B) \quad \cdots(8.6-7)$$

これにより、質点の距離のみでその大きさが決まる内力による仕事は、経路によらず始点Aの状態と終点Bの状態のみで決まるため、保存力である。この保存力によって“内部位置エネルギー”が蓄えられる。
従って、質点系に外力が作用していない、または外力が仕事をしない場合、運動エネルギーKと内部位置エネルギーU''の和は保存する。

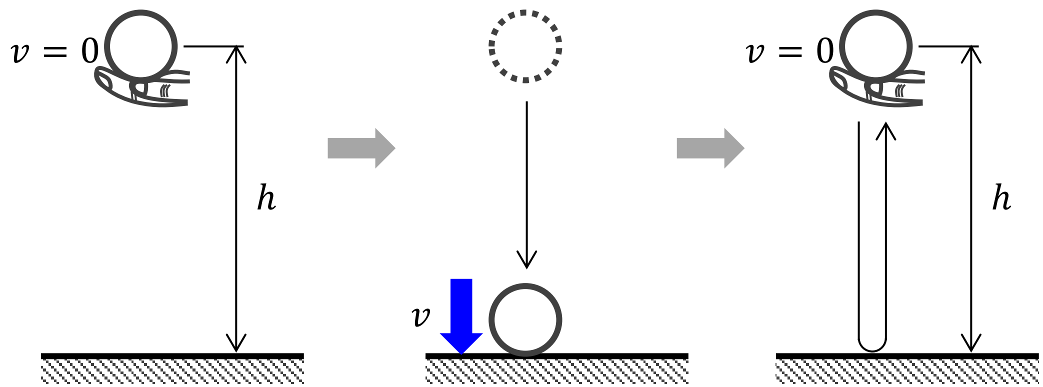
$$K + U'' = const \quad \cdots(8.6-8)$$

あるいは外力が保存力であれば、外力による位置エネルギーU'が発生する。この場合は、運動エネルギーKと外力による位置エネルギーU'、内部位置エネルギーU''の三つの和が保存する。

$$K + U' + U'' = const \quad \cdots(8.6-9)$$

８．７．衝突

ボールをある高さからと落とした時、床から跳ね返って元の位置に戻ってきたとする。



このときボールは床に対して衝突するが、その際エネルギーの散逸は起きていない。つまりエネルギー保存則に従い、元の位置に戻ることができたのである。このような衝突を**“弾性衝突”**と呼ぶ。

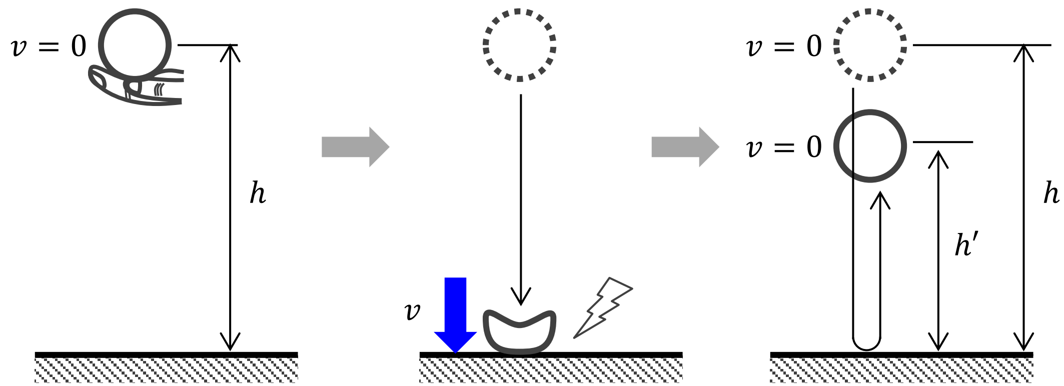
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \cdots(8.7-1)$$

弾性衝突のとき、ボールの衝突前後の運動量は、大きさは変わらず向きだけが変化するので、運動方程式は次のように書ける。

$$mv - m(-v) = 2mv = Fdt \quad \cdots(8.7-2)$$

8. 7. 衝突

でも実際は、ボールが床に衝突するとき衝突音が鳴ることから、音によってエネルギーの散逸が起き、元の高さまでボールは戻ってこない（熱によるものもあるが省略）。このような衝突を**“非弾性衝突”**と呼ぶ。



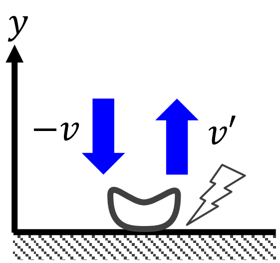
この場合のエネルギー式は、散逸エネルギーをDとおいて次のようになる。

$$\underbrace{mgh = \frac{1}{2}mv^2}_{\text{衝突前}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + D = mgh' + D}_{\text{衝突後}} \quad \cdots(8.7-2)$$

このときの散逸エネルギーDがわかればよいのだが、これは非常に難しい。

8. 7. 衝突

そこで次の“**反発係数**”eを導入する。
今、ボールと床の衝突であるから床の運動量変化は0とみてよい。このとき、衝突直前のボールの速度を$-v$、直後の速度をv'として、反発係数eを次のように定義する。



$$e = -\frac{v'}{v} \quad (1 \geq e \geq 0) \quad \cdots (8.7-3)$$

$e = 1$は元の位置までボールが戻ってくる**完全弾性衝突**であり、$e = 0$は床に衝突後ボールは跳ね返らず静止してしまう**完全非弾性衝突**である。例えばピンポン玉を硬い床に落とせばそれなりの高さまで跳ね返るが、毛布の上に落とせばほとんど跳ね返らない。このように反発係数eは材質にも大きく依存する。

反発係数は、本来相対運動している二つの物体に定義される。

$$e = -\frac{(v'_1 - v'_2)}{v_1 - v_2} \quad (1 \geq e \geq 0) \quad \cdots (8.7-4)$$

最初の定義（床に対して）はこの式の$v_2 = v'_2 = 0$とすればよい。

8．7．衝突

ここで運動方程式について見なおし、両辺にdtを掛ける、時刻t_1からt_2まで積分すると

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_2}-\boldsymbol{P_1}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt \quad \cdots(8.7-5)$$

が得られる。物体の運動量変化は、t_1からt_2の間に物体に作用した力を積み上げたものと一致する。この右辺の力の時間積分を **“力積”** と呼ぶ。力積が特に重要となるのは、今の例では床の衝突前後の一瞬である。ボールはこの非常に短時間のうちに床から力を受ける。この力を **“衝撃力”** と呼ぶ。衝撃力が短時間にどのような経路をたどるか？を直接知るのは困難だが、運動量変化から衝撃力の力積を知ることはできる。