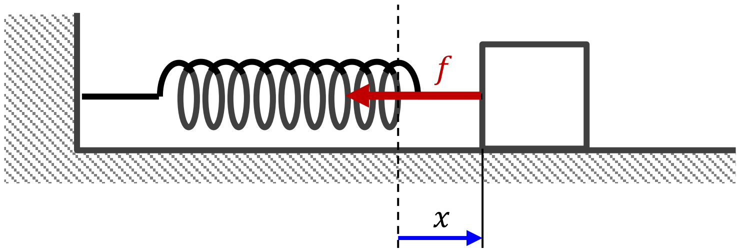
６．振動

6．1．単振動

2.9節でばねの力に関するフックの法則について述べた。ここではそのフックの法則によって得られる単純な現象について説明する。



今、上図のように質量 m の物体にばねがつながっていて、復元力 f が働いているとする。物体に摩擦などの抵抗が作用しないとき、運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \cdots(6.1-1)$$

これは、xを二回微分すると元の関数の形に戻ることを意味している（符号と係数は別にして）。

この式はxの二階常微分方程式という

6．1．単振動

このような関数はすでにわかっていて．．．そのまえに一つ新しい物理量を導入する。
（6.1-2）式を少し変形して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \cdots(6.1-3)$$

としたとき、“$\omega = \sqrt{k/m} \quad \cdots(6.1-4)$”を“角周波数”“角振動数”“円振動数”などと呼ぶ。本書では統一して減速**“角振動数”**を採用する。

元に戻って（6.1-3）式の解は

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = c_o\sin(\omega t + \alpha) \quad \cdots(6.1-5)$$

$$\left(c_o = \sqrt{A^2 + B^2}、\alpha = A/c_o\right)$$

である。この式のc_oを**振幅**、αを**位相**と呼び、これらは初期条件によって決まる。
また、虚数を使っても表現できて

$$x(t) = c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t} \quad \cdots(6.1-6)$$

（6.1-5）と（6.1-6）は、**オイラーの公式** $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ によって等価であることが言える。
なお、$x(t)$は数学によって証明されたものであり、単純に受け入れればよい。

６．１．単振動

なお、本書は高校生でも受け入れやすいようにしたいので虚数は使わず、できる限り三角関数で話を進める。

微分方程式の解である変位の関数$x(t)$を特定するには初期条件が必要である。そこで例えば$t=0$でばねをx_oまで伸ばし、ぱっと手を離した瞬間の速度v_oをとすると、（6.1-5）式のtに0を代入して

$$x_o = x(0) = c_o \sin\alpha \qquad \cdots(6.1-7)$$

が得られる。さらに（6.1-5）式をtで微分し、tに0を代入すると

$$v_o = v(0) = \omega c_o \cos\alpha \qquad \cdots(6.1-8)$$

が得られる。ここで、（6.1-7）式×ωの二乗と（6.1-8）式の二乗をたしあわせることで振幅c_oが求まる。さらにこのc_oから位相αも求まる。

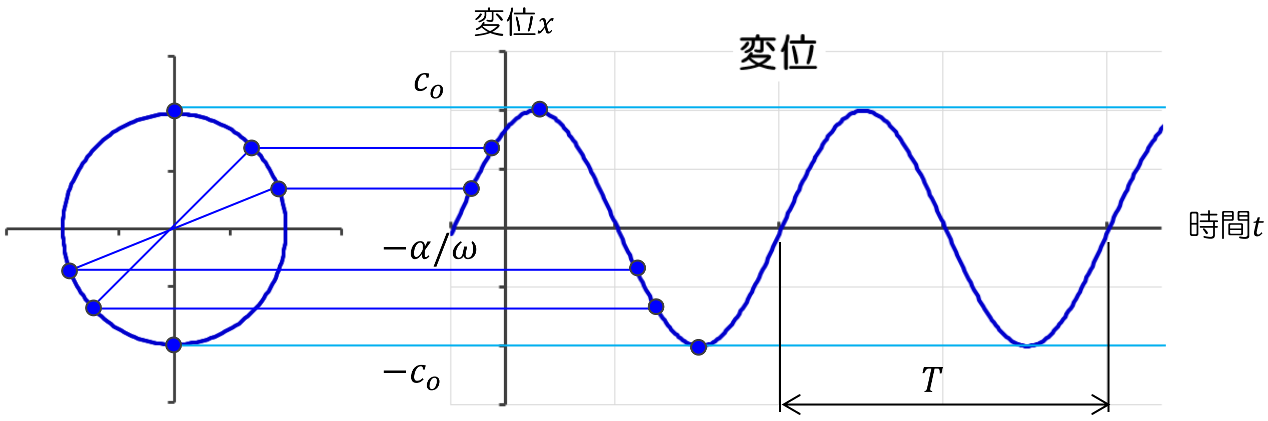
$$\omega^2 {x_o}^2 + {v_o}^2 = \omega^2 {c_o}^2 (\sin\alpha)^2 + \omega^2 {c_o}^2 (\cos\alpha)^2$$

$$\rightarrow \quad c_o = \sqrt{{x_o}^2 + \frac{{v_o}^2}{\omega^2}}、\ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x_o}{c_o}\right) \qquad \cdots(6.1-5)$$

従って、変位の関数$x(t)$は特定できた。

6. 1. 単振動

この結果を横軸：時間t、縦軸：変位xでグラフ化すると、次のようになる。



グラフ上で示したTを **“周期”** と呼び、時間Tごとに同じ変位が繰り返される。このような繰り返し現象を **“振動”** と呼ぶ。特に、今回のようなフックの法則に従って生じる振動を **“単振動”** または “調和振動” と呼ぶ。また、周期の逆数$1/T$を **“周波数”** とよび単位は[Hz]である。周波数は「単位時間あたりに振動が繰り返される回数」を意味し、振動の特徴を量るパラメータとして重宝される。

単振動の特徴は「変位を正弦波で表せる」ことである。これは等速円運動を1つの軸に射影したもので、その円の直径が単振動の振幅と一致する。

６．１．単振動

ここで、単振動のエネルギーについて考える。

$$W=\int_{x_o}^{x}-kxdx=\frac{1}{2}k({x_o}^2-x^2)\quad\cdots(6.1-3)$$

復元力が行う仕事は上式からわかるように、積分経路に依存せず最初と最後の位置のみで決まる。従って、復元力の仕事は保存力であり位置エネルギーでもある（4.4節参照）。また単振動の運動方程式（6.1-2）式から、このWが運動エネルギーと等価であるから、

$$\frac{1}{2}m(v^2-{v_o}^2)=\frac{1}{2}k({x_o}^2-x^2)$$

$$\rightarrow\quad\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=K+U=const\quad\cdots(6.1-4)$$

となる。

これは単振動が力学的エネルギー保存を満たすことを意味している。

６．１．単振動

ここで位置$x(t)$、速度$v(t)$はそれぞれ次のように表せるので、

$$x(t) = c_o \sin(\omega t + \alpha)$$
$$v(t) = \omega c_o \cos(\omega t + \alpha)$$

（6.1-4）式に代入して

$$K = \frac{1}{2} m {c_o}^2 \omega^2 \{\cos(\omega t + \alpha)\}^2$$
$$U = \frac{1}{2} k {c_o}^2 \{\sin(\omega t + \alpha)\}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 {c_o}^2 \{\sin(\omega t + \alpha)\}^2$$
$$\therefore K + U = \frac{1}{2} m \omega^2 {c_o}^2 \quad \cdots (6.1 - 5)$$

を得る。これは単振動が力学的エネルギー保存を満たすことを意味している。
また単振動の全エネルギーは、振幅の二乗${c_o}^2$と角振動数の二乗ω^2に比例する。

6．1．単振動

単振動は周期運動であるので、1周期T間の時間的な平均運動エネルギーと位置エネルギーを求めてみる。このとき、三角関数の二乗の平均値はcos、sinそれぞれ

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\alpha)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{1-\sin 2(\omega t+\alpha)}{2}\right\}dt=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\alpha)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{1-\cos 2(\omega t+\alpha)}{2}\right\}dt=\frac{1}{2}$$

であるから、

$$\overline{K}=\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{1}{2}m{c_o}^2\omega^2\{\cos(\omega t+\alpha)\}^2\right\}dt=\frac{1}{4}m{c_o}^2\omega^2$$

$$\overline{U}=\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{1}{2}m\omega^2{c_o}^2\{\sin(\omega t+\alpha)\}^2\right\}dt=\frac{1}{4}m{c_o}^2\omega^2$$

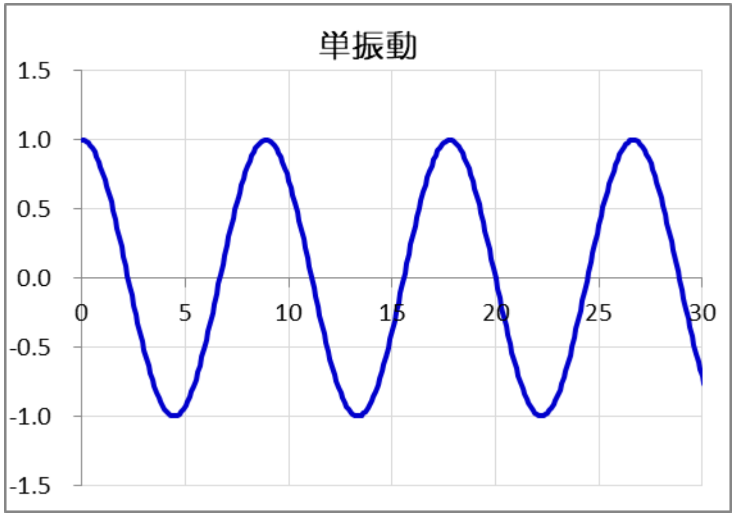
となり、両者は一致する上、単振動の全エネルギーを半分ずつにしたものである。

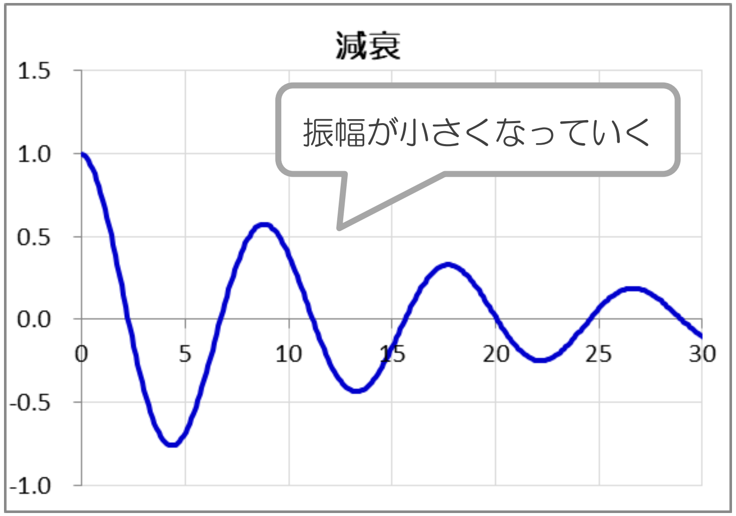
６．２．減衰振動

6.2減衰振動と6.3強制振動は、本書の目的からするとやや高度過ぎるし、数学的に難しい計算が必要となる。そのため、概略のみを述べることとする。

単振動に抵抗が働くとき、抵抗により物体の振動は徐々に小さくなり、やがて静止する。このような運動を“減衰振動”と呼ぶ。今、速度の大きさに比例する**粘性抵抗**が物体に働くものとする。粘性抵抗の抵抗係数をηとして運動方程式は次のように表せる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta\frac{dx}{dt} \quad \cdots(6.2-1)$$





６．３．強制振動

今度は減衰振動している物体に、外部から時間的に変化する力$F(t)$が加わるとき、この運動を **“強制振動”** と呼ぶ。強制振動で重要となる現象は **“共振”** である。共振は構造物の破壊に至ることもあるので機械設計を志すならこの部分は理解しておく必要がある。
例えば、強制力が三角関数的に変化する場合、運動方程式は次のように表せる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + m\rho\sin\omega_f t \qquad \cdots(6.2-2)$$

単振動で得られる角振動数は系固有のものであり **“固有振動数”** と呼ぶ。この固有振動数と強制力の角振動数が一致するとき、振幅が一気に増大する（摩擦がなければ∞の振幅になる）。このような現象を“共振”と呼ぶ。
共振をうまく使えばメリットは大きいものの、けっこう厄介な場合もある。有名な事故の例として、タコマナローズ橋の崩落事故がある。これは強風の影響で橋が揺れ出し、共振現象によって倒壊してしまった事故である。その他にもマイクをアンプに近づけると“キーン”と耳障りな音が鳴るのも共振のせいである。

※：wikipedia、
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%BF%E3%82%B3%E3%83%9E%E3%83%8A%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%82%BA%E6%A9%8B

６．４．単振り子

あとまわし