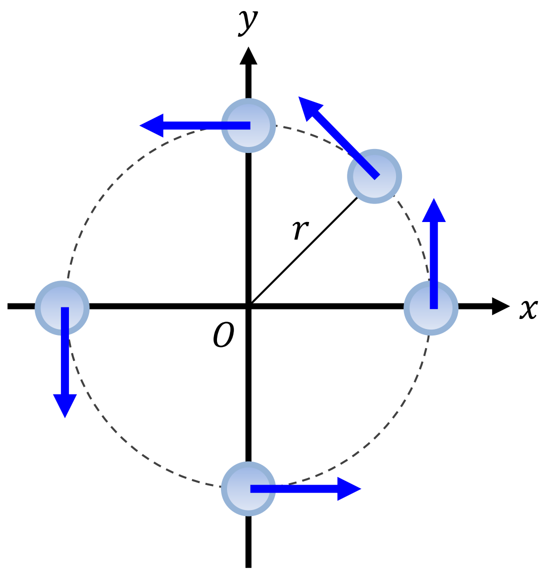
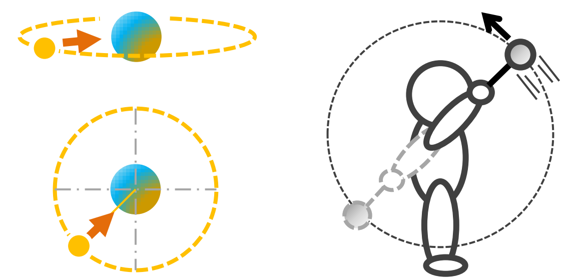
5. 円運動

5．1．円運動

“円運動”は「**運動の軌跡が円を描く**」ものである。例えば、太陽をまわる地球の運動、おもりにひもをつけてまわす運動などが挙げられる。

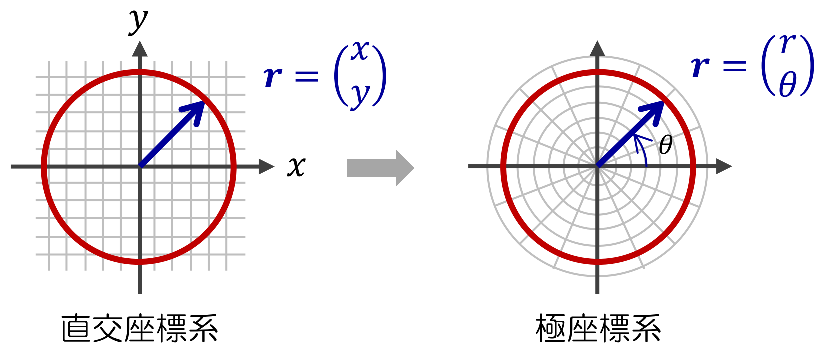




物体が半径rで円運動するとき、**物体は常にその運動の向きを変えている。**ということは慣性の法則によると、物体には常になんらかの力が働いていることになる。この**“力”**の正体について明らかにしていこう。

5. 1. 円運動

円を直交座標系で表すと$x^2+y^2=r^2$である。円軌道上にある物体の位置$\boldsymbol{r}=(x,y)$は、この式上の点として解く必要があり、扱いずらい。そこで、原点からの距離rと方角を決める角度θの組(r,θ)で表してみよう。これは「北北東に5km」という表現と同じである。このような座標系を**（平面）極座標系**と呼ぶ。



円を極座標で表現すれば原点からの距離rは定数として扱え、変数が一つ減ることから数学的な操作を行う上で大きなメリットとなる。

ただし、数学嫌いの人にとっては残念なお知らせがある。それは極座標が三角関数のオンパレードになることである。しかし、この三角関数のおかげで円運動の本質が見えてくる他、計算自体も劇的に簡単になる。三角関数自体は非常に簡単で単純なものである。また、そこにある法則性のおかげて計算は非常に簡単になるので、毛嫌いせず受け入れてもらいたい。徳川家15代将軍の名前を全部覚えるよりはるかに簡単である。

5. 1. 円運動

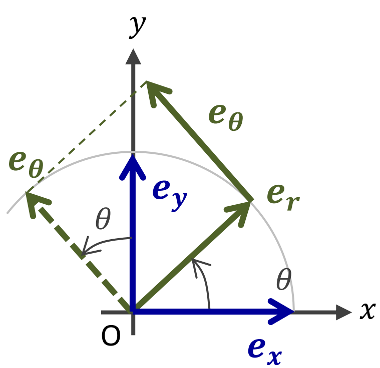
さて、円軌道上の任意の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$を表す際、直交座標系ではx軸とy軸の単位軸ベクトル$\boldsymbol{e_x}$、$\boldsymbol{e_y}$を使う。

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y} \quad \cdots (5.1-1)$$

それに対し極座標系は、位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の方向を向いた単位ベクトル$\boldsymbol{e_r}$と、その位置で円に接する反時計周り方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e_\theta}$を使う（下図参照）。このとき、$\boldsymbol{e_r}$の向きを**動径方向**、$\boldsymbol{e_\theta}$の向きを**方位方向**と呼ぶ。

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e_r} \quad \cdots (5.1-2)$$

なお、直交座標系の軸単位ベクトル$\boldsymbol{e_x}$、$\boldsymbol{e_y}$と、極座標系の動径、方位方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e_r}$、$\boldsymbol{e_\theta}$の間には次の関係がある。



$$\boldsymbol{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}、\boldsymbol{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e_r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}、\boldsymbol{e_\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

5．1．円運動

ここで“直交座標系”と“極座標系”による運動表現の違いについて見てみる。
それぞれの座標系で、位置、速度、加速度を表すと次の表のようになる。

	直交座標系	極座標系
位置	$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y}$	$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e_r}$
速度	$\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{e_x} + x\boldsymbol{e_y})$	$\boldsymbol{v} = r\omega\boldsymbol{e_\theta}$
加速度	$\boldsymbol{a} = \dot{\omega}(-y\boldsymbol{e_x} + x\boldsymbol{e_y}) - \omega^2(x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y})$	$\boldsymbol{a} = r\dot{\omega}\boldsymbol{e_\theta} - r\omega^2\boldsymbol{e_r}$

なお、計算の過程は次頁に示す。
ここで$\omega = d\theta/dt$を“**角速度**”、$\dot{\omega} = d\omega/dt$を“**角加速度**”と呼ぶ。
ωは「単位時間あたりの方向 = 角度変化」、$\dot{\omega}$は「単位時間あたりの角速度変化」の意味を持つ。
物理学では**時間による微分**を、**変数の頭に“・”**（ドット）をつけて表すことも多い。
この標記にも慣れておくこと。

5．1．円運動

ここでは前頁の表中の式の導出過程を示す。必要なければ読み飛ばして構わない。
円運動の速度は位置の式をそれぞれ時間で微分すればよく、直交座標系では

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{dx}{dt}\boldsymbol{e_x} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{e_y} \\ &= \frac{d\theta}{dt}\left(-r\sin\theta\,\boldsymbol{e_x} + r\cos\theta\,\boldsymbol{e_y}\right) = \omega\left(-y\boldsymbol{e_x} + x\boldsymbol{e_y}\right) \quad \cdots(5.1-3)\end{aligned}$$

極座標系では次のようになる。

$$\boldsymbol{v} = r\frac{d\boldsymbol{e_r}}{dt} = r\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = r\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = r\omega\boldsymbol{e_\theta} \quad \cdots(5.1-4)$$

さらに加速度について、直交座標系では

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\left\{\omega\left(-y\boldsymbol{e_x} + x\boldsymbol{e_y}\right)\right\} = \dot{\omega}\left(-y\boldsymbol{e_x} + x\boldsymbol{e_y}\right) - \omega^2\left(x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y}\right) \quad \cdots(5.1-5)$$

極座標系では次のようになる。

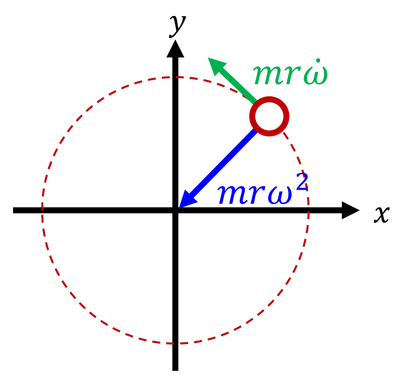
$$\boldsymbol{a} = \frac{d(r\omega\boldsymbol{e_\theta})}{dt} = r\dot{\omega}\boldsymbol{e_\theta} - r\omega^2\boldsymbol{e_r} \quad \cdots(5.1-6)$$

5．1．円運動

前頁の表を見比べると、円運動は極座標で表現した方がシンプルである。そこで、運動方程式を極座標で書き換えると

$$-mr\omega^2\boldsymbol{e_r} + mr\dot{\omega}\boldsymbol{e_\theta} = F_r\boldsymbol{e_r} + F_\theta\boldsymbol{e_\theta} \quad \cdots(5.1-7)$$

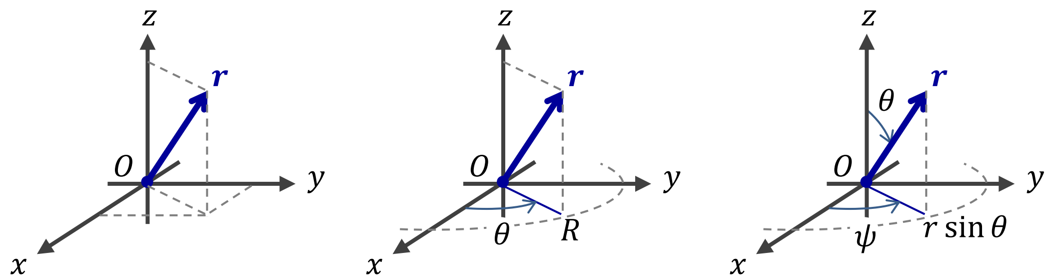
が得られる。これにより動径方向$\boldsymbol{e_r}$と方位方向$\boldsymbol{e_\theta}$の運動に分解でき、動径方向 には$mr\omega^2$に等しい力が、方位方向 には$mr\dot{\omega}$に等しい力が働いていることがわかる。円の中心方向を向く力を **“向心力”** 、円の方位方向を向く力を **“接線力”** と呼ぶ。**向心力**は物体が円に沿うよう運動の向きを変えるための力であり、**接線力**は物体の速さを変えるための力である。



この力を直交座標系で特定するのは難しい。
従って、円運動やそれに準ずるような運動（楕円運動など）は極座標を用いて表現する方がわかりやすい。

5．1．円運動

以上の話から、運動の性質を捉える上で座標系の選択は重要であることがわかった。
なお、今までは二次元で話を進めたが、三次元にも拡張できる。三次元の場合は次の3つの座標系が主に用いられる。



直交座標系 (x, y, z)　　円柱座標系 (R, θ, z)　　極座標系 (r, θ, ψ)

特に極座標系と直交座標系との間には次の関係がある。

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\sin\psi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \cdots (5.1-8)$$

5．2．角速度ベクトル

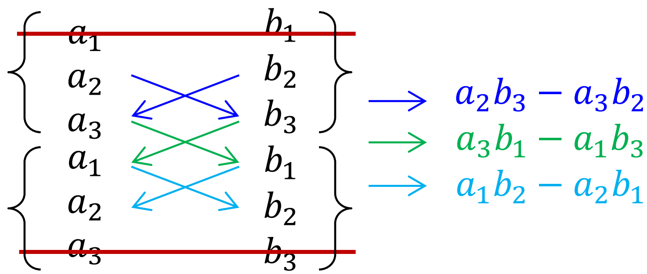
前節で「単位時間あたりの角度変化」として**"角速度"**を定義した。ただ、角速度をスカラーで扱うと、極座標を使ったとしてもまだまだ計算は複雑である。
実は**「角速度をベクトル」**として扱えるようにすることで、運動の表現は簡素化される。そこで新しいベクトルの演算**"外積"**を導入する。ベクトルの外積は三次元ベクトルでなければならないが、例えば位置ベクトルのz軸成分を"0"にしてしまえば平面上の運動にも対応できる。ベクトルの外積は次のように定義される。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \cdots (5.2-1)$$

この計算、覚えるのが大変そうだが、実は次のようにすると簡単に覚えられる。

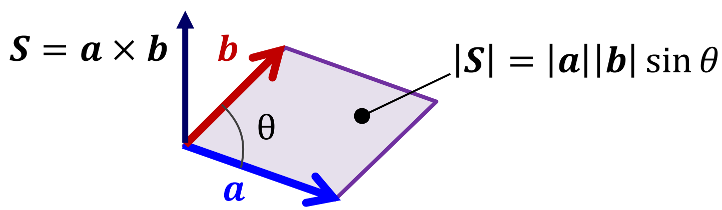
Step1）ベクトルをそれぞれ縦に二つずつ並べる
Step2）一番上と一番下を除去する
Step3）2行目と3行目の成分をたすき掛けして引き算する$(a_2 b_3 - a_3 b_2)$
Step4）これを3行目と4行目、4行目と5行目、と繰り返す。

5. 2. 角速度ベクトル



こういうやり方って一般的なのかな？これは理数研の宮田先生に数十年前に教わった方法である。私は未だにこの方法を使っていて、すごく便利である。

ベクトルの**外積**には **“平行四辺形の面積”** の意味もある。ただ、面積のベクトル？？？となるが「**求める面の法線方向に、面積と同じ大きさを持つベクトル**」と理解すればよい。



外積の利点は表記が楽になる以外にもう一つある。それは**三角関数を使わずに計算ができる**ことである。面積の大きさは上図のように$\sin\theta$を含んでいる。しかしベクトルの成分がわかっていれば、その成分を掛け合わせるだけで計算できる。

5．2．角速度ベクトル

さて、前節の（5.1-6）式に戻って

$$\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{e_x} + x\boldsymbol{e_y})$$

であるから、これを三次元ベクトルに拡張して成分表現すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (5.2-2)$$

xy平面内の運動であるからz軸成分が0なのは当然である。
ここで“角速度ベクトル”$\boldsymbol{\omega}$を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \cdots (5.2-3)$$

とりあえずこの角速度ベクトルの意味は後で説明するとして、次式を計算する。

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} \quad \cdots (5.2-4)$$

5. 2. 角速度ベクトル

この式と（5.2-2）式が一致するには、

$$\begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}、\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (5.2-5)$$

とすればよい。この結果**「速度ベクトルvはωとrの外積によって得られる」**ことがわかる（掛ける順番に注意！！）。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad \cdots (5.2-6)$$

ここで角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$の意味について考える。
今、物体の運動はxy平面内に縛られている。このとき、回転運動はxy平面の法線方向、つまりz軸まわりに回転することになる。もし他の軸まわりだとxy平面から逸脱し、z成分は0でなくなる。これは、位置ベクトルに回転行列を掛けることで容易に確かめられる。

5. 2. 角速度ベクトル

例えば、x軸周りの回転行列$R_x(\theta)$とz軸周りの回転行列$R_z(\theta)$を使ってxy平面内のベクトル$\boldsymbol{r}$を回転させてみる。

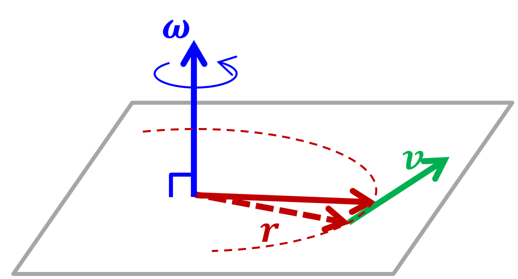
a）x軸周りについて

$$R_x(\theta)\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta \\ -y\sin\theta \end{pmatrix}$$

b）z軸周りについて

$$R_z(\theta)\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って、角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$とは「回転軸方向に角速度の大きさを持つベクトル」ということである。また、その向きは右ねじの法則に従う。



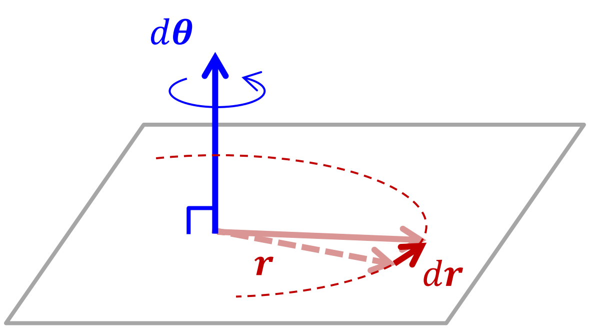
5．2．角速度ベクトル

実は角速度ベクトルが定義できたことにより、無限小の回転ベクトル $d\boldsymbol{\theta}$ も定義できる。

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \quad \rightarrow \quad d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} dt \quad \cdots (5.2-7)$$

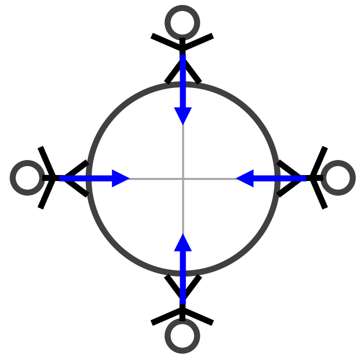
回転ベクトルが角速度ベクトルと同じ向きであることは、上式から明らかである。
ただしこれは無限小であることが前提となる。通常回転変位によって得られるのは曲線であり、有向線分（直線）とはならないためである。
角速度と速度の関係式の両辺のdtを掛ければ、円運動中の微小変位ベクトル$d\boldsymbol{r}$は回転ベクトル$d\boldsymbol{\theta}$を用いて次式で表せる。

$$v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \boldsymbol{r} \quad \rightarrow \quad d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r} \quad \cdots (5.2-8)$$

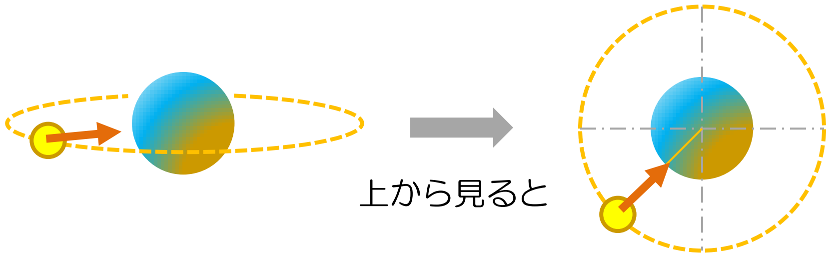


5．3．中心力

地上に存在するすべての物体には重力が働いている。これは万有引力の法則によるものである（詳細は2.2節を参照）。我々は地球に対して極端に小さいので、地上を平面と思っているがそうではない。地球は丸いので地上は球面※である。重力はこの球面に対して垂直に働いている。つまり、重力は地球の中心に向かって作用している。



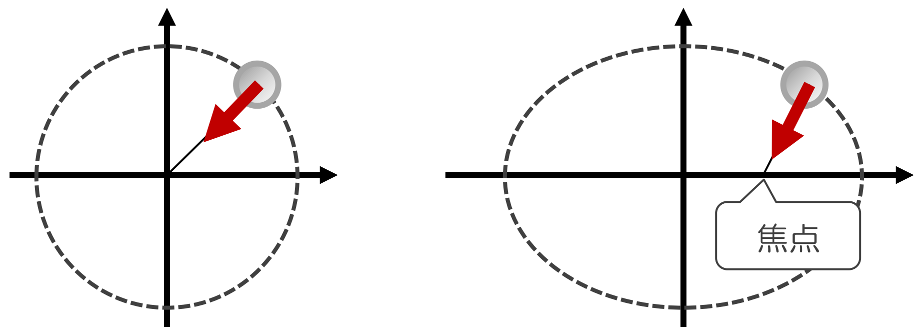
この性質は地上の物体だけでなく、地球を周回している人工衛星や月にも同様に働く。これらは地球を中心に円運動している。



※：実際は完全な球ではないしデコボコもしているが、ざっぱに言えば球面として問題ない

5．3．中心力

円運動する物体には、必ず円の中心を通る力が働く。このような力を **“中心力”** と呼ぶ（2.2節の万有引力、5.1節の向心力は中心力である）。中心力は円錐曲線（楕円、双曲線、放物線）上の運動に対しても焦点を中心として作用する。



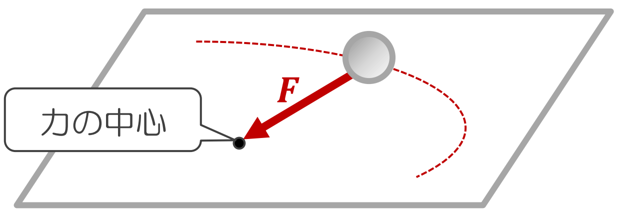
一般化された中心力の定義は次の通りである。

物体に働く力$\boldsymbol{F}$の作用線が、質点の位置や速度に関係なく常に1つの定点を通るとき、その力$\boldsymbol{F}$を **“中心力”** 、定点を **“力の中心”** と呼ぶ。

5. 3. 中心力

中心力には次の非常に重要な性質がある。

「物体が中心力のみを受けて運動するとき、その軌跡は1つの平面内に拘束される」



二つの直線があれば平面が作れることを念頭に、この証明を簡単に行う。

step1）初速度ベクトル$\boldsymbol{v_o}$と力ベクトル$\boldsymbol{F}$の二つから平面Sが作れる。
step2）運動方程式から新たな速度ベクトル$\boldsymbol{v}$が生じるが、これは$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{v_o}$の和であるから平面S内に生じる。当然、移動した後の物体の位置も平面S内にある。

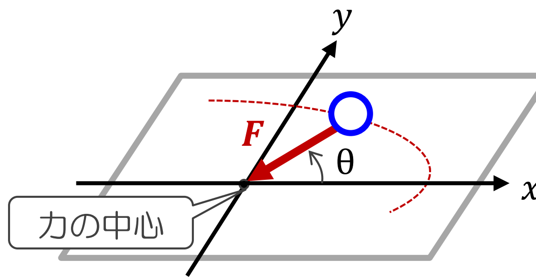
$$m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v_o} = \boldsymbol{F}dt \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \frac{dt}{m}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{v_o}$$

step3）移動後の物体に作用する中心力$\boldsymbol{F'}$は、力の中心を通るため平面S内にある。
以降これを繰り返す。

5．3．中心力

次に、中心力によって得られる物体の運動の特徴について調べる。
先に種明かしをすると、新たな物理量**“面積速度”が一定**になるということである。

中心力の運動を表現するには、その特徴を有効に活用するのが良い。そこで力の中心を原点とし、運動の軌跡を含む平面内に二つの座標軸をとる。



物体の位置$\boldsymbol{r}$、速度$\boldsymbol{v}$、加速度$\boldsymbol{a}$を極座標表現すると次のようになる。

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e_r}$$
$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{e_r} + r\omega\boldsymbol{e_\theta} \quad \left(\omega = \dot{\theta}\right) \qquad \cdots(5.3-1)$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\omega^2)\boldsymbol{e_r} + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\boldsymbol{e_\theta}$$

上式は物体の運動を極座標で表す場合の一般式であるため、自分で実際に計算してみてほしい。

5. 3. 中心力

中心力$\boldsymbol{F}$の大きさをfとすると$\boldsymbol{F} = f\boldsymbol{e_r}$で表せるので、運動方程式は（5.3-1）式を使って

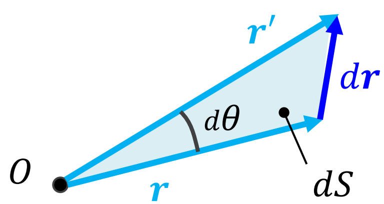
$$m(\ddot{r} - r\omega^2)\boldsymbol{e_r} + m(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\boldsymbol{e_\theta} = f\boldsymbol{e_r} \quad \cdots(5.3-2)$$

になる。このとき方位方向$\boldsymbol{e_\theta}$には力が働いていないので、$\boldsymbol{e_\theta}$の項について次の関係が成り立つ。

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = const \quad \cdots(5.3-3)$$

この式が示す意味は、次の外積の計算と照らし合わせることではっきりする。

物体が力の中心Oを基準に位置$\boldsymbol{r}$から$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$へ微小移動したとき、下図で作られる微小面積ベクトル$d\boldsymbol{S}$は、5.2節で見たベクトルの外積で求まる。



$$d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) \quad \cdots(5.3-4)$$

これを両辺dtで割れば次式が得られる。なお、この$d\boldsymbol{S}/dt$を以降$\boldsymbol{h}$で表す。

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{h} \quad \cdots(5.3-5)$$

5. 3. 中心力

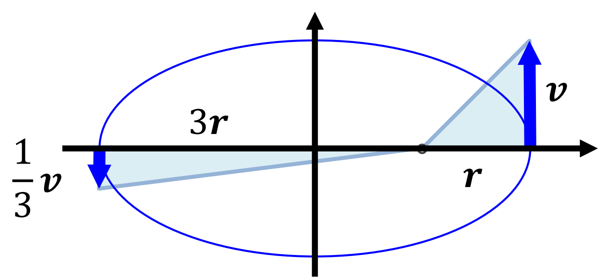
$\boldsymbol{h}$の大きさは$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{v}$が同一平面上にあることから、z軸成分のみで決まる（理由は5.2節参照）。このとき、$v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$、$v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$を考慮して、

$$|\boldsymbol{h}| = (\boldsymbol{h})_Z = \frac{1}{2}\left(v_y r\cos\theta - v_x r\sin\theta\right) = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \quad \cdots(5.3-6)$$

が得られる。この式は（5.3-3）式の1/2倍になっている。

$\boldsymbol{h}$は先の図のとおり**「単位時間あたりに動径が掃引する面積」**を表しており、この大きさを**“面積速度”**と呼ぶ。

面積速度一定のとき、下図のように距離が3倍になれば速度は1/3で良い。つまり、物体は力の中心に近づくほど速くなり、遠くなるほどゆっくりになる性質がある。



以上の結果から、**「中心力のみを受ける物体は、面積速度一定で運動する」**ことが得られた。この特徴を**面積の定理**と呼ぶ。この定理は後で出てくる“ケプラーの第二法則”と一致する。

5. 3. 中心力

さらに中心力のもう一つの性質として重要なのは、**「力の大きさが“力のの中心”から距離rだけの関数$f(r)$で表せるとき、中心力は保存力」**となることである。

このとき中心力は$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{e}_r$であるから、中心力は径方向の変位に対して行われることになる。

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0}^{r_1} f(r)\boldsymbol{e}_r \cdot (\boldsymbol{e}_r dr\ ) = \int_{r_0}^{r_1} f(r)dr \quad \cdots (5.3-8)$$

このように、中心力の仕事は距離rだけの関数であることがわかる。中心力の大きさ$f(r)$はrだけなので、$f(r)$をrで積分した関数$U(r)$によって表すことができる（あたりまえといわれればそれまでだが）。

$$U(r) = \int_{r}^{const} f(r)dr \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = f(r) \quad \cdots (5.3-9)$$

これを（5.3-8）式に代入すれば、**中心力の仕事は積分経路に関係なく始点と終点のみで決まる**。このような力は4.6節でみた保存力そのものである。

$$W = \int_{r_0}^{r_1} f(r)dr = \int_{r_0}^{r_1} -\frac{\partial U(r)}{\partial r} dr = -\int_{r_0}^{r_1} dU(r) = U(r_1) - U(r_0)$$

以上によりお題は証明できた。

5．4．惑星の運動

我々は地球上に住んでいるので身近といえば身近だが、実生活においてこの運動を取り上げることはほとんどない。従って必要性を感じなければ飛ばして構わない。

なお、この節の計算は結構煩雑で厄介である。しかし目的は計算することではなく、運動の本質を理解することであるから、計算の詳細は勢いよく省略する（決して面倒くさいわけでは．．．．．．．．．．ない、とは．．．）。すでに誰かが計算してくれているので、ありがたくその結果を受け入れよう。

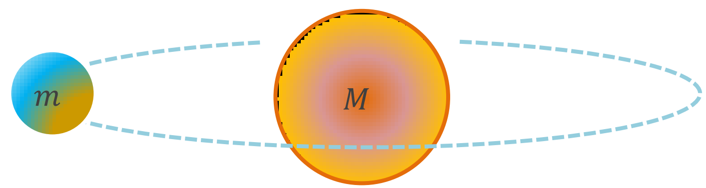
さて、“惑星の運動”といえばケプラーさんの名前が真っ先にあがるのではないだろうか？惑星の運動に関する法則は、ケプラーさんによって三つにまとめられ、ケプラーの法則と呼ぶ。

第一法則：惑星は太陽を焦点の1つとする楕円軌道を描く
第二法則：太陽と惑星を結ぶ直線が単位時間に掃引する面積は一定である
第三法則：惑星が太陽の周りをまわる周期の二乗は楕円軌道の長半径の三乗に比例する

ニュートンさんは、運動の三法則と万有引力の法則を用いてケプラーの法則をすべて導出できることを証明した。

5. 4. 惑星の運動

そこで、ニュートンの運動の法則と万有引力から惑星の運動の軌道を求めてみよう。条件として、太陽を中心にその周囲をまわる惑星の運動について考える。このとき太陽の質量は、他の惑星と比べて極めて大きく、太陽は不動とみてよい。また、他の惑星間に生じる万有引力は太陽のそれに比べ十分小さく、無視できるものとする（二体問題とする）。



太陽と惑星はお互いに万有引力によって引き合っている。この万有引力は中心力なので惑星の軌道は1つの平面内に収まる。その平面内で太陽の位置、つまり力の中心に原点をとり、惑星の位置を極座標(r, ψ)で表すことにする。また、太陽の質量をM、惑星の質量をm、万有引力定数をGとする。万有引力は次式で表せる（ベクトルで）。

$$\boldsymbol{f}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e_r} \quad \cdots (5.4-1)$$

5．4．惑星の運動

惑星の運動方程式は、前節の（5.3-2）式そのままであるからそれを拝借する。

$$m(\ddot{r}-\dot{r}\dot{\psi}^2)\boldsymbol{e_r}+m(2\dot{r}\dot{\psi}+r\ddot{\psi})\boldsymbol{e_\theta}=-G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e_r}\quad\cdots(5.4-2)$$

すると、動径方向と接線方向それぞれから連立方程式ができる。

$$\ddot{r}-\dot{r}\dot{\psi}^2=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$2\dot{r}\dot{\psi}+r\ddot{\psi}=0\quad\rightarrow\quad r^2\dot{\psi}=h(=const)$$

$\boldsymbol{e_\theta}$側の式は（5.3-3）式で得られた面積速度一定の式である。万有引力は中心力かつその大きさがrのみの関数なので保存力である。従ってエネルギー保存則を満足する。さらに、（5.3-1）式により$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e_r}+r\dot{\psi}\boldsymbol{e_\psi}$であることを考慮に入れて、

$$\frac{1}{2}m\left({v_r}^2+{v_\psi}^2\right)+U(r)=E$$

$$\rightarrow\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\psi}^2\right)-G\frac{Mm}{r}=E\quad\cdots(5.4-2)$$

5．4．惑星の運動

惑星に作用するのは万有引力（中心力）のみであるから面積速度は一定である。その一定値をhととれば（5.3-6）式から$h=r^2\dot{\psi}$とでき、

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-G\frac{Mm}{r}=E$$

さらに次の変形を行うことで$\dot{r}$を消せ、時間を陽に含まない形にできる。

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\psi}{dt}\frac{dr}{d\psi}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\psi}$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{m}{2}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\psi}\right)^2+\frac{mh^2}{2r^2}-G\frac{Mm}{r}=E$$

この式は、惑星の軌道を求める微分方程式となっている。
しかしこの微分方程式を解くのはかなり煩雑である。そこで先人の成果をありがたく受け入れると、

$$d\psi=\pm\frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2}+\frac{G^2M^2}{h^4}-\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)^2}} \qquad \left(\because u=\frac{1}{r}\right)$$

が得られる。

5．4．惑星の運動

この積分を、積分定数が0になるよう角度の基準をとれば

$$\psi = \pm\cos^{-1}\frac{u - GM/h^2}{\sqrt{\dfrac{2E}{mh^2} + \dfrac{G^2M^2}{h^4}}}$$

となる。この結果、rとψを用いて惑星の軌道を表すことができる。

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2Eh^2}{G^2M^2m}}\cos\psi}$$

この式をよ～～～く見ると、楕円の式と同じであることに気づく。

$$\left.\begin{aligned} &\text{半直弦：} l = \frac{h^2}{GM} \\ &\text{離心率：} \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m}} \end{aligned}\right\} \quad r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\psi}$$

半直弦、離心率ともに面積速度が含まれていることから、**中心力の作用する物体の軌道は面積速度に依存**している。