３．簡単な運動の例

３．１．等速度運動

３．２．等加速度運動

３．３．力のつり合い

３．４．加速度運動

３．５．フックの法則

3. 簡単な運動の例

ここでは、簡単な運動の計算例を紹介する。

物体の運動は、運動方程式が立てられさえすればほぼ理解できた、とみなしてよい。そのためには、物体に加わる力をきちんと正確に図示できなければならない。
この考え方に基づいて、簡単な運動の計算例を解説していく。
従って、まどろっこしいが当たり前と思われることも愚直に書いて話を進める。テストやレポート、計算書等でここまで書く必要はない。ただ、本来は無意識のうちに辿っているプロセスを丁寧に書くことで、より力学を正確に把握できるのである。

3. 1. 等速度運動

等速直線運動のことを“等速度運動”と呼ぶ。
ここでは、次に示す等速度運動を運動方程式を立てるところから説明していく。

時刻t_oのとき位置$\boldsymbol{r_o}$にいる質量mの物体が等速$\boldsymbol{v_o}$で運動しているとき、時刻tのときにいる位置$\boldsymbol{r}$を求める。

慣性の法則により等速度運動する物体に力は作用しない。従って、運動方程式から次の関係が得られる（ここは当たり前なのであえて言う必要はない）。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{0} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_o}(= 一定) \quad \cdots(3.1-1)$$

速度$\boldsymbol{v}$は位置の時間微分$d\boldsymbol{r}/dt$で決まるので、次の積分計算を実行すれば、時刻tの位置$\boldsymbol{r}$が求まる。

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v_o} \quad \leftrightarrow \quad \int_{\boldsymbol{r_o}}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{v_o} dt \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_o} = \boldsymbol{v_o}(t - t_o)$$

$$\therefore \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_o}(t - t_o) + \boldsymbol{r_o} \quad \cdots(3.1-2)$$

3．2．等加速度運動

時刻t_oのとき位置$\boldsymbol{r_o}$にいる質量mの物体が等加速度$\boldsymbol{a}$で運動しているとき、時刻tのときにいる位置$\boldsymbol{r}$を求める。
物体に加速度が生じているので運動の法則に従い、運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} \quad \leftrightarrow \quad d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}dt \quad \cdots(3.2-1)$$

これを時間tで積分して、速度の関数が得られる。

$$\int_{\boldsymbol{r_o}}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{v} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{a}dt \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(t-t_o) + \boldsymbol{v_o} \quad \cdots(3.2-2)$$

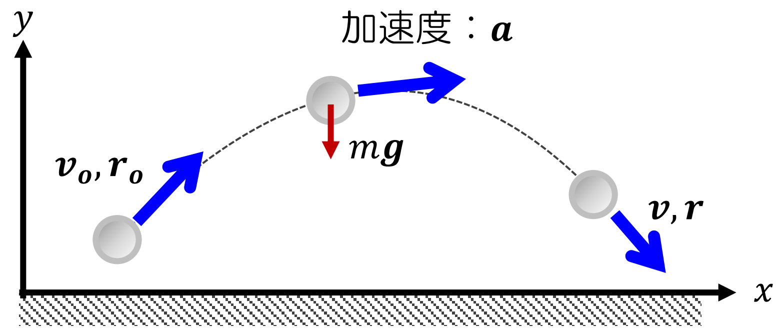
速度$\boldsymbol{v}$は位置の時間微分$d\boldsymbol{r}/dt$で決まるので、次の積分計算を実行すれば、時刻tの位置$\boldsymbol{r}$が求まる。

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{a}(t-t_o) + \boldsymbol{v_o} \quad \leftrightarrow \quad \int_{\boldsymbol{r_o}}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} = \int_{t_o}^{t} \{\boldsymbol{a}(t-t_o)dt + \boldsymbol{v_o}dt\}dt$$

$$\therefore \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t-t_o)^2 + \boldsymbol{v_o}(t-t_o) + \boldsymbol{r_o} \quad \cdots(3.2-3)$$

上式は等価速度運動の一般式である。この式に当てはまる等加速度運動の代表例として、放物運動があるので、その運動について見ることにする。

3．2．等加速度運動



ボールが位置$\boldsymbol{r_o}$、初速$\boldsymbol{v_o}$で放たれて以降、ボールには鉛直方向（$-y$方向）重力のみが加わる。このときのボールの運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{g} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} m dv_x/dt \\ m dv_y/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad \cdots(3.2-4)$$

従って、水平方向（x方向）は等速度運動、鉛直方向（y方向）は等加速度運動であることがわかる。あとは水平方向は（3.1-2）式、鉛直方向は（3.2-2）、（3.2-3）式同様に計算を実行すればよく、次の結果が得られる（$t_o = 0$とした）。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ox}t + r_{ox} \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oy}t + r_{oy} \end{pmatrix} \quad \cdots(3.2-5)$$

３．３．力のつりあい

３．３．１．水平面上のつりあい（摩擦なし）

３．３．２．水平面上のつりあい（摩擦あり）

３．３．３．斜面上のつりあい

３．３．４．滑車を介したおもりのつりあい

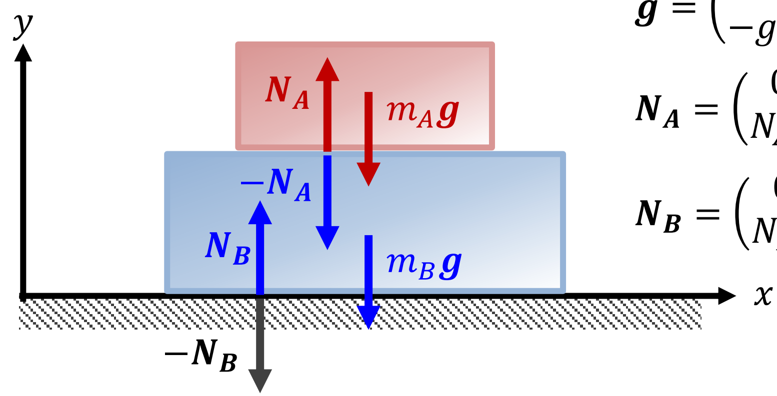
３．３．５．天井から吊るしたおもりのつりあい

３．３．６．くさびのつりあい

力のつりあいは、運動方程式の「加速度＝０」とした場合である。従って、力のつりあいをあえて運動方程式と分けて説明する必要は何もない。くどいようだが、力のつりあいも運動方程式そのものである。

３．３．１．水平面上のつりあい（摩擦なし）

次のような例を考えたとき、物体にかかる力をすべて図示する。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと次のようになる（左辺$\boldsymbol{0}$は加速度）。

物体Aの運動方程式：$m_A\boldsymbol{0} = m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_A}$

物体Bの運動方程式：$m_B\boldsymbol{0} = m_B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B}$

これを成分計算すれば、

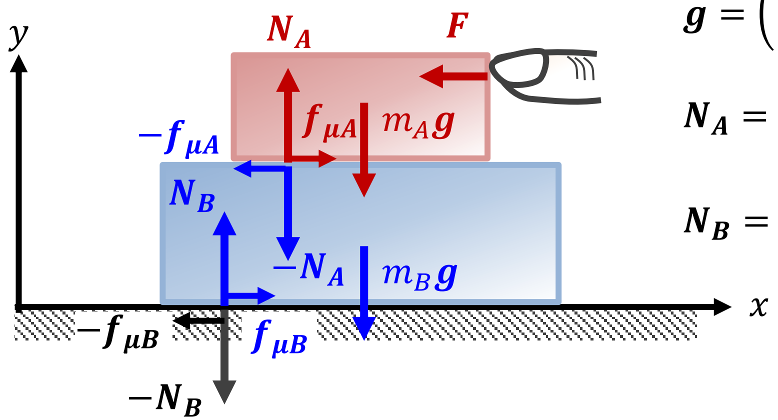
物体Aの運動方程式：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_A g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad N_{Ay} = m_A g$

物体Bの運動方程式：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_B g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} \rightarrow \quad N_{By} = (m_A + m_B)g$

となり、物体A、Bが床を押す力は“$(m_A + m_B)g$”である、という当たり前の結果が得られる。

３．３．２．水平面上のつりあい（摩擦あり）

さきほどの例に対し、物体Aに指で力Fを加えたとき、物体にかかる力をすべて図示する。物体間には摩擦が生じるものとする。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu A}} = \begin{pmatrix} f_{\mu Ax} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu B}} = \begin{pmatrix} f_{\mu Bx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

物体Aの運動方程式：$m_A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{F} + m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{f_{\mu A}}$

物体Bの運動方程式：$m_B\boldsymbol{0} = -\boldsymbol{f_{\mu A}} + m_B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B} + \boldsymbol{f_{\mu B}}$

３．３．２．水平面上のつりあい（摩擦あり）

これを成分計算すれば、

物体Aの運動方程式：$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-F\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-m_A g\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_{Ay}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{\mu Ax}\\0\end{pmatrix}$

物体Bの運動方程式：$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f_{\mu Ax}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-m_B g\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\N_{Ay}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_{By}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{\mu Bx}\\0\end{pmatrix}$

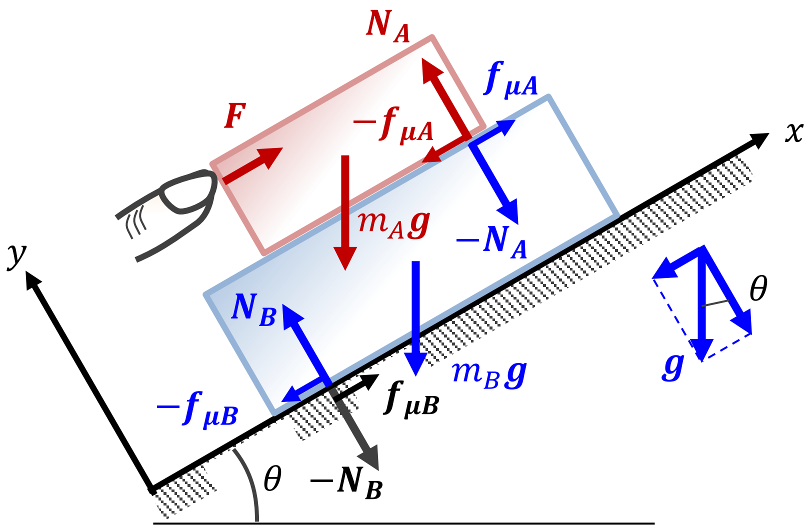
となり、

$$f_{\mu Ax}=f_{\mu Bx}=F\text{、}N_{Ay}=m_A g\text{、}N_{By}=(m_A+m_B)g$$

が得られる。この関係からFが摩擦力より小さい間、物体は動かないことがわかる。

３．３．３．斜面上のつりあい

3.3.2では水平面上のつりあいだったが、今度は斜面上のつりあいについて考える。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -g\sin\theta \\ -g\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu A}} = \begin{pmatrix} f_{\mu Ax} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu B}} = \begin{pmatrix} f_{\mu Bx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

物体Aの運動方程式：$m_A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{F} + m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_A} - \boldsymbol{f_{\mu A}}$

物体Bの運動方程式：$m_B\boldsymbol{0} = \boldsymbol{f_{\mu A}} + m_B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B} - \boldsymbol{f_{\mu B}}$

３．３．３．斜面上のつりあい

これを成分計算すれば、

物体Aの運動方程式：$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-m_A g\sin\theta\\-m_A g\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_{Ay}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f_{\mu Ax}\\0\end{pmatrix}$

物体Bの運動方程式：$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{\mu Ax}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-m_B g\sin\theta\\-m_B g\cos\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\N_{Ay}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_{By}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f_{\mu Bx}\\0\end{pmatrix}$

となり、

$$f_{\mu Ax}=F-m_A g\sin\theta \text{ 、} N_{Ay}=m_A g\cos\theta$$

$$f_{\mu Bx}=F-(m_A+m_B)g\sin\theta \text{ 、} N_{By}=(m_A+m_B)g$$

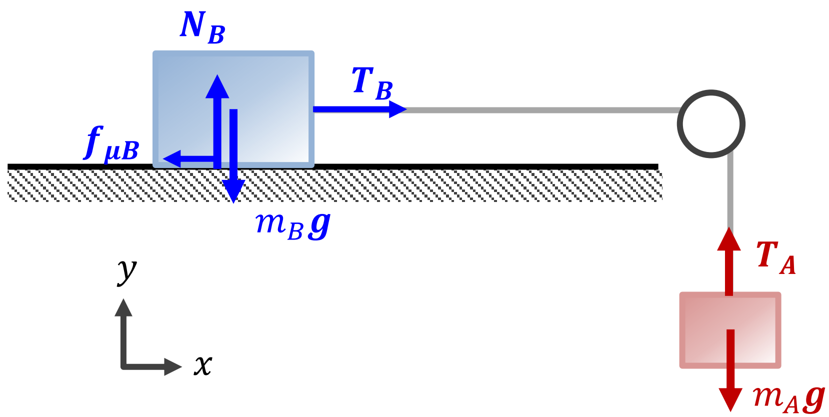
が得られる。仮に指で押す力Fを0としたとき、

$$f_{\mu Ax}=-m_A g\sin\theta \text{、} f_{\mu Bx}=-(m_A+m_B)g\sin\theta$$

となるので、斜面の傾斜角θが大きくなると摩擦では耐えられず物体が滑り出すところがある。この物体が滑り出す傾斜角を摩擦角と呼ぶ。

3．3．4．滑車を介したおもりのつりあい

二つのおもりが滑車を介して糸でつながれているときのつりあいについて考える。このとき、糸の重さや糸と滑車の摩擦は無視する。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu B}} = \begin{pmatrix} -f_{\mu Bx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

物体Aの運動方程式：$m_A\boldsymbol{0} = m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T_A}$

物体Bの運動方程式：$m_B\boldsymbol{0} = m_B\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T_B} + \boldsymbol{N_B} + \boldsymbol{f_{\mu B}}$

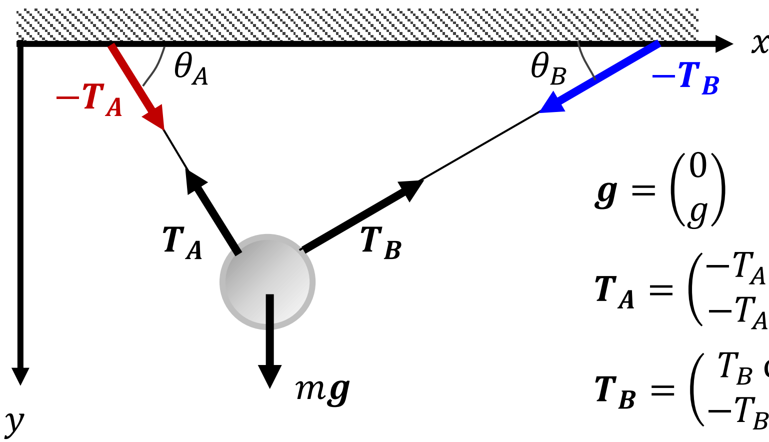
これを成分計算すれば、$T = m_A g$、$f_{\mu Bx} = m_A g$、$N_{By} = m_B g$が得られる。

物体Aの運動方程式：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_A g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$

物体Bの運動方程式：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_B g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_{\mu Bx} \\ 0 \end{pmatrix}$

3．3．5．天井から吊るしたおもりのつりあい

天井から2本のヒモでつるしたおもりが静止している場合を考える。糸の伸びや重さは無視する。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_A} = \begin{pmatrix} -T_A \cos\theta_A \\ -T_A \sin\theta_A \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} T_B \cos\theta_B \\ -T_B \sin\theta_B \end{pmatrix}$$

ここで、おもりの運動方程式を書くと次のようになる。

$$m\boldsymbol{0} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T_A} + \boldsymbol{T_B}$$

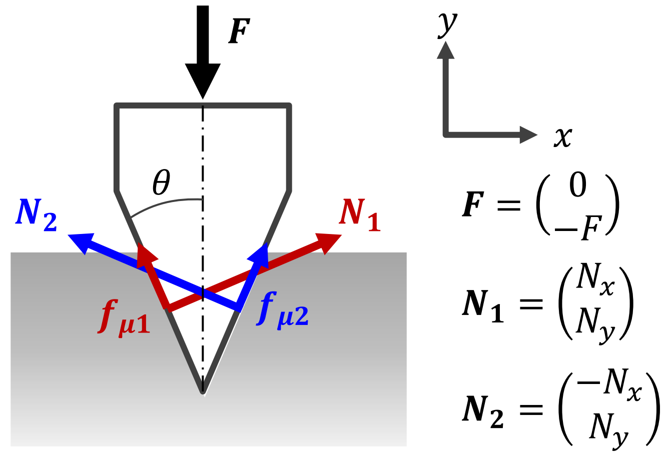
これを成分計算して次の結果が得られる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T_A \cos\theta_A \\ -T_A \sin\theta_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_B \cos\theta_B \\ -T_B \sin\theta_B \end{pmatrix}$$

$$T_A = \frac{mg}{\cos\theta_A (\tan\theta_A + \tan\theta_B)}、T_B = \frac{mg}{\cos\theta_B (\tan\theta_A + \tan\theta_B)}$$

３．３．６．くさびのつりあい

くさびのつりあいについて考える。くさびに働く重力は無視する。



ここで、くさびの運動方程式を書くと次のようになる。

$$m\mathbf{0}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{f}_{\mu 1}+\boldsymbol{f}_{\mu 2}\quad\cdots(3.3.6-1)$$

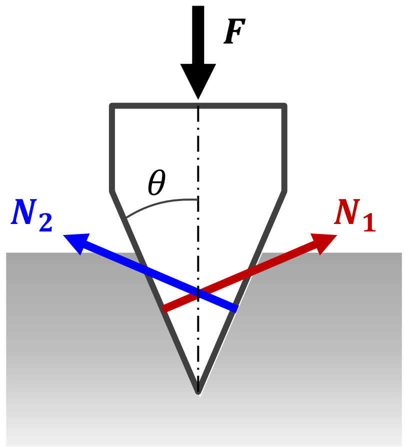
これを成分計算して次の結果が得られる。

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}N_x\\N_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-N_x\\N_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-f_{\mu x}\\f_{\mu y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{\mu x}\\f_{\mu y}\end{pmatrix}$$

$$F=2\left(N_y+f_{\mu y}\right)=2R_y$$

3．3．6．くさびのつりあい

静摩擦力が確定できるのは、最大静止摩擦力のときだけである。それ以外の静摩擦力は抗力として扱うことになるので、垂直抗力と合わせて$R_y = F/2$で表した。
摩擦を無視する場合は$R_y = N_y$となるので、垂直抗力を確定できる。



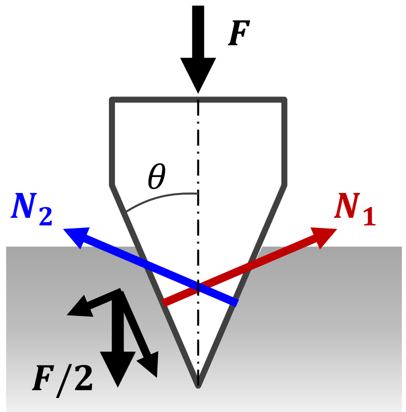
垂直抗力$\boldsymbol{N}$のy方向分が$N_y = F/2$であるから、$|\boldsymbol{N_1}| = |\boldsymbol{N_2}| = N$とおいて

$$N \sin\theta = \frac{F}{2} \quad \rightarrow \quad N = \frac{F}{2\sin\theta}$$

となる。

3．3．6．くさびのつりあい

よくやる間違いとして、斜面に力が働くからとルーティン的に力を斜面方向に分解してしまう。



これが間違いであることは「力の合力が“0”にならない」ことから確認できる。くさびの片面のみを考えて$\boldsymbol{F}$の半分を斜面に対して分解する。

$$|\boldsymbol{N_1}| = |\boldsymbol{N_2}| = \frac{F}{2}\sin\theta$$

すると、斜面と平行な成分の力$(F\cos\theta)/2$が残ってしまう。もし斜面に摩擦がなくても、くさびがこれ以上動かないことは経験的にわかる。ということは、斜面方向の力を受け持つための抗力がどこかから発生しなくてはならない。しかし運動方程式（3.3.6-1）式にはそのような力が存在しない。つまり力の合力が“0”ではなく、本来くさびは動かなければならないがその結論と矛盾する。よって、この方法は間違いであることがわかる。

3．4．加速度運動

3．4．1．水平面上の運動（摩擦なし）

3．4．2．水平面上の運動（摩擦あり）

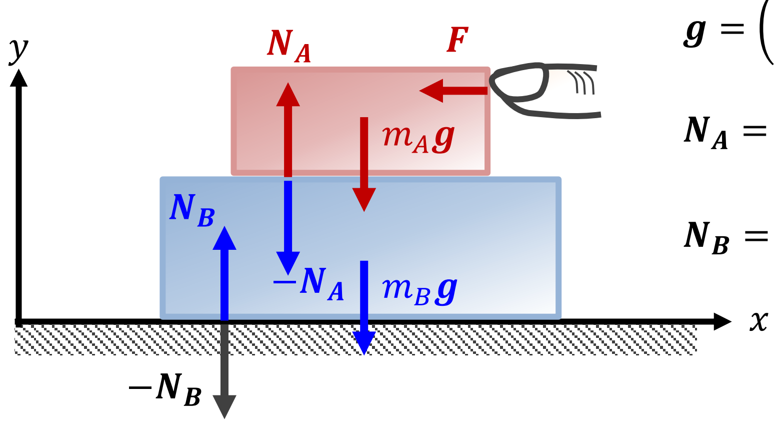
3．4．3．斜面上の運動

3．4．4．滑車を介したおもりの運動

運動している物体の運動方程式をみることで、前節の力のつりあいが運動方程式の「加速度＝0」とした場合であることが再認識できるはずである。そこであえて同じ例を使って運動している物体の運動方程式を見ることにする。

3．4．1．水平面上の運動（摩擦なし）

3.3.2の例をそのまま使う。このとき物体が鉛直方向に動かないのは明らかである。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

物体Aの運動方程式：$m_A \dfrac{d\boldsymbol{v_A}}{dt} = \boldsymbol{F} + m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_A}$

物体Bの運動方程式：$m_B \dfrac{d\boldsymbol{v_B}}{dt} = m_B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B}$

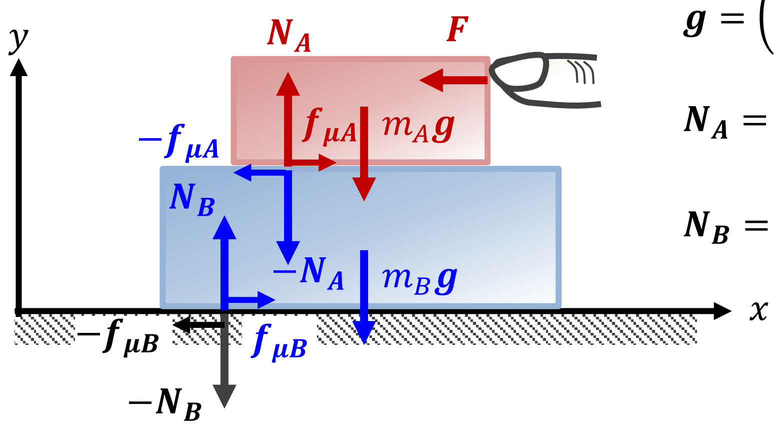
これを成分計算すれば、物体Aは物体B上を滑り、物体Bは動かないことがわかる。

物体Aの運動方程式：$\begin{pmatrix} m_A dv_{Ax}/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_A g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix}$

物体Bの運動方程式：$\begin{pmatrix} m_B dv_{Bx}/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_B g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix}$

3．4．2．水平面上の運動（摩擦あり）

さきほどの例同様、3.3.2の例をそのまま使う。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu A}} = \begin{pmatrix} f_{\mu Ax} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu B}} = \begin{pmatrix} f_{\mu Bx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

物体Aの運動方程式：$m_A \dfrac{d\boldsymbol{v_A}}{dt} = \boldsymbol{F} + m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{f_{\mu A}}$

物体Bの運動方程式：$m_B \dfrac{d\boldsymbol{v_B}}{dt} = -\boldsymbol{f_{\mu A}} + m_B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B} + \boldsymbol{f_{\mu B}}$

動摩擦は垂直抗力に比例するので、動摩擦係数をμととって$\boldsymbol{f_\mu} = \mu\boldsymbol{N}$の関係が成り立つ。
これを考慮にいれて成分計算すると

３．４．２．水平面上の運動（摩擦あり）

$$\begin{pmatrix} m_A dv_{Ax}/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_A g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_A N_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_B dv_{Bx}/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_A N_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_B g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_B N_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、

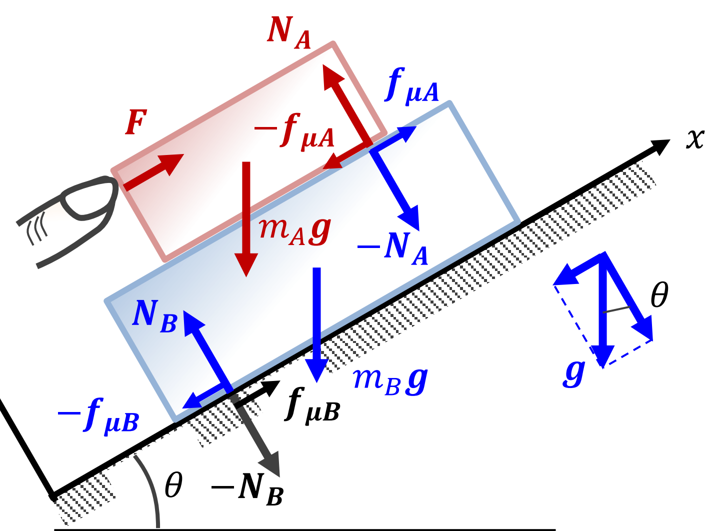
$$N_A = m_A g、\ \frac{dv_{Ax}}{dt} = -\frac{F}{m_A} + \mu_A g$$

$$N_{By} = (m_A + m_B) g、\ \frac{dv_{Bx}}{dt} = \left(\mu_B - \mu_A \frac{m_A}{m_B} \right) g$$

が得られる。物体AとBの間に摩擦がなければ物体Bは動かなかった。しかし摩擦が生じることでその反作用が物体Bを動かす要因となっている。

3．4．3．斜面上の運動

3.3.3の例をそのまま使う。このとき、物体がy方向に動かないのは明らかである。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -g\sin\theta \\ -g\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu A}} = \begin{pmatrix} \mu_A N_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu B}} = \begin{pmatrix} \mu_B N_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

$$\text{物体}A\text{の運動方程式：}m_A \frac{d\boldsymbol{v_A}}{dt} = \boldsymbol{F} + m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_A} - \boldsymbol{f_{\mu A}}$$

$$\text{物体}B\text{の運動方程式：}m_B \frac{d\boldsymbol{v_B}}{dt} = \boldsymbol{f_{\mu A}} + m_B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B} - \boldsymbol{f_{\mu B}}$$

３．４．３．斜面上の運動

これを成分計算すれば、

$$\begin{pmatrix} m_A dv_{Ax}/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_A g \sin\theta \\ -m_A g \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_A N_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_B dv_{Bx}/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_A N_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_B g \sin\theta \\ -m_B g \cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ N_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_B N_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、

$$N_{Ay} = m_A g \cos\theta \text{、} \frac{dv_{Ax}}{dt} = \frac{F}{m_A} - (\tan\theta + \mu_A) g \cos\theta$$

$$N_{By} = (m_A + m_B) g\text{、} \frac{dv_{Bx}}{dt} = \left\{ \mu_A \frac{m_A}{m_B} - (\tan\theta + \mu_B) \right\} g \cos\theta$$

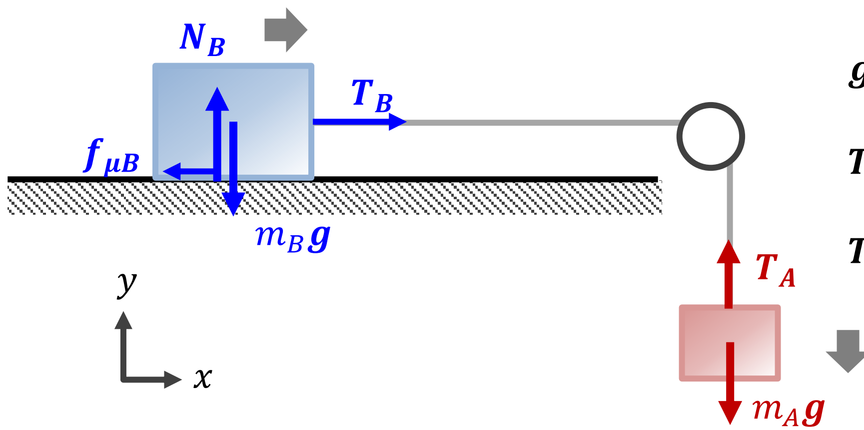
となる。Fが$(\tan\theta + \mu_A) m_A g \cos\theta$より大きければ物体Aは斜面を登っていく。また、AとBが一体となって動くための条件は、

$$\frac{dv_{Ax}}{dt} = \frac{dv_{Bx}}{dt} \quad \rightarrow \quad F = \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \mu_A - \mu_B \right) m_A g \cos\theta$$

となる。

3．4．4．滑車を介したおもりの運動

3.3.4の例をそのまま使う。このとき、物体Bがy方向に動かないのは明らかである。また、物体AとBは一緒に動くので同じ加速度であることも明らかである。



$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{N_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f_{\mu B}} = \begin{pmatrix} -\mu_B N_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_B} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、各物体ごとの運動方程式を書くと、次のようになる。

物体Aの運動方程式：$-m_A\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m_A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T_A}$

物体Bの運動方程式：$m_B\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m_B\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T_B} + \boldsymbol{N_B} + \boldsymbol{f_{\mu B}}$

３．４．４．滑車を介したおもりの運動

これを成分計算すれば、

物体Aの運動方程式：$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_A dv/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_A g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$

物体Bの運動方程式：$\begin{pmatrix} m_B dv/dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_B g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_B N_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$

が得られる。動摩擦係数μ_Bがm_A/m_Bより小さければ、物体AとBはおなじ加速度で運動する。

$$N_{By} = m_B g$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m_A - \mu_B m_B}{m_A + m_B} g$$

３．５．フックの法則

作成中