2．運動の法則

2．1．力とは何か？

実は“力”とはいったい何者か？その正体を知っている人は誰もいない。
でも“力”が存在していることはみんな知っている。

これはどういうことか？
我々が知る重力（万有引力）とか磁石の力とかは力じゃないか！と言われればそうだ。
確かに、重さがあれば互いに引き合う力が働く、磁石の+と−が近づけば引き合うし、+と+、−と−が近づけば反発力が生まれる、ということは知っている。でも「なんで？」と問われると答えることはできない。

従って、力学では**“力”とは何かよくわからないが、その存在を認めた上で何らかの法則を見つけ出そう**、というのが本質的なところである。
将来ニュートンやアインシュタイン並にすごい人が「力とは何か？」を解き明かしてくれるかもしれないが、今はそれを待つしかない。

2．2．万有引力の法則

力とは何かわからなくても、何によって力がもたらされているか？はわかっている。その一つに“**万有引力の法則**”の法則がある。これはニュートンさんが木からリンゴが落ちるのをみてひらめいた、とされている（実際は違うそうだが）。
万有引力の法則は「**二つの物体は互いの質量に比例し、その距離に反比例する引力が相互に働く**」というものである。

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (G\text{:万有引力定数})$$

例えば、隣に立っている綺麗な女性との間にも引力は働くし、逆隣の汚いおっさんとも否応なしに引力は働く。しかし、我々がその力を感じることはない。何故ならその力は極めて小さいからである。万有引力定数は6.67×10^{-11} [Nm^2/kg^2]と小さく、相手の質量がとてつもなく大きくない限り感じることはない。ところが、実際感じる相手がある。それが“地球”だ。地球の質量は6×10^{24}[kg]と桁違いである。さらに地球の半径6.37×10^6[m]を上式に代入すると、

$$G\frac{m_1}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11}\frac{6 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6)^2} \cong 9.8[m/s^2]$$

を得る。この9.8[m/s^2]こそ、よく知られる“**重力加速度g**”である。

2．2．万有引力の法則

すると、地球と我々を含む地上のありとあらゆる物体との間の引力は次式で表せる。

$$F = mg$$

この力を“重力”と呼ぶ。簡単に言ってしまえば**「地球との間の引力が重力」**である。
地上での議論において重力は常に作用するものであり、非常に重要である。

万有引力、万物が所有している引力の法則の由来は、あらゆる物体は質量を持っており、その質量によって引力の大きさが決まることからきている。

2．3．ニュートンの運動の三法則

物体の運動と力の間にある法則を、ニュートンは3つにまとめた。

第一法則：慣性の法則

物体は力の作用を受けない限り、静止または一直線上の一様運動を続ける

＊慣性：現状の運動を維持しようとする性質

第二法則：運動の法則

物体の運動の変化は、その物体に働く力に比例し、力の働く向きに生じる

第三法則：作用・反作用の法則

物体1が物体2に力を及ぼすとき、物体2は物体1に対して同じ大きさで逆向きの力を及ぼす

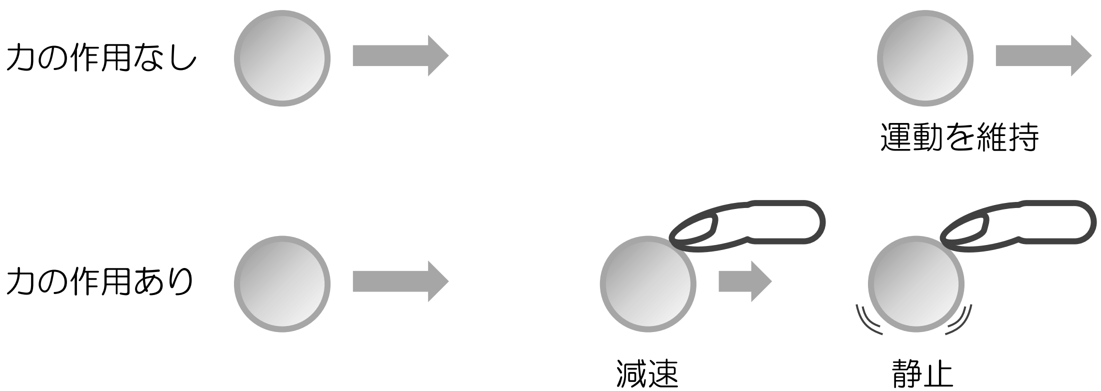
これら3つの法則は経験から得られたもので証明は今のところできない。つまり、力学ではこれら3つの法則を**妄信せよ！！**ということである。ただ、我々の身近に起きている現象は、確かにこれら3つの法則に則っている。従って、今のところこれらを疑う必要はない。1章でも述べたが、このように証明不可能ではあるものの受け入れなければならない前提のことを**“公理”**と呼ぶ。

2. 4. 慣性の法則

第一法則：慣性の法則

物体は力の作用を受けない限り、静止または一直線上の一様運動を続ける

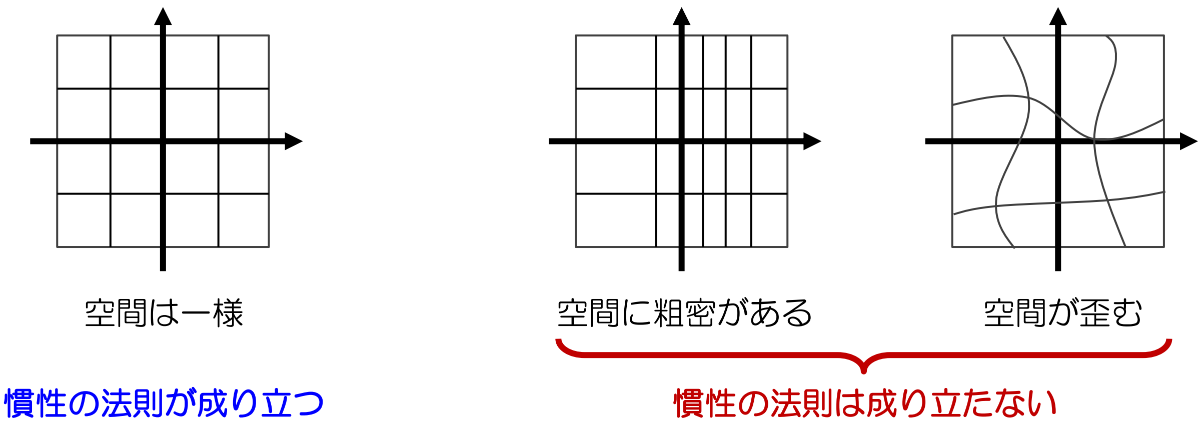
つまり、物体は力が加わらない限り、今の慣れ親しんだ状態を常に維持する性質がある、ということから、慣性の法則と呼ばれている。逆に言えば、「物体に力を加えると速度は変わる = 加速度が生じる」ということである。



2. 4. 慣性の法則

“慣性の法則”は力学において非常に重要な意味を持つので、この法則の**本質的な意味**について説明する。

「物体が等速直線運動を維持するために、空間は一様であって粗密や歪みは存在してはならない」



これはどういうことか？
空間が一様であれば、空間内で定義される長さは常に同じ基準で計られる。しかし空間に粗密があれば、基準長さは粗密に応じて変化する。歪みも同様である。速度は距離÷時間であるから、基準長さが変わればそれに応じて速度も変化してしまう。
つまり慣性の法則は“空間が一様”であることを要求しているのである。空間のこのような性質を**“空間の一様性”**と呼ぶ。

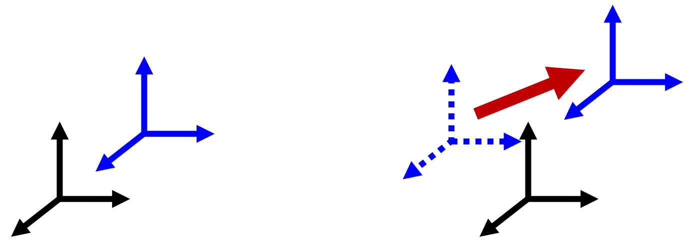
2．4．慣性の法則

“慣性の法則”は速度に基づき定義されていることから、一様性は空間だけでなく時間にも要求される。時間については**“時間の一様性”**と呼ぶ。
さらにもう一つ。慣性の法則から動く方向によって物体の速度が変化してはならない。つまり、空間は等方的（どっちを向いても景色は同じ）でなければならない。このような性質を**“空間の等方性”**と呼ぶ。

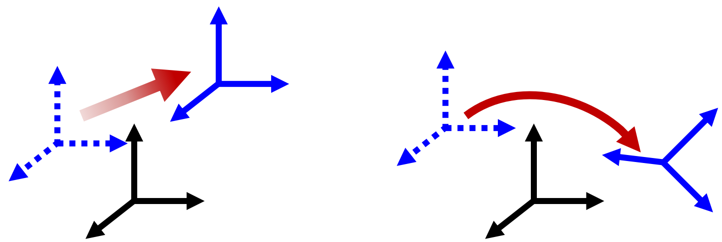
以上、**“空間の一様性”**、**“空間の等方性”**、**“時間の一様性”**の三つを満たす座標系を**“慣性系”**と呼ぶ。
これらはごくごく当たり前として認識されており、あまり説明されることはない。しかしながら、この要求があって初めて「力学は強力な理論によって構築される」ので、この点は知っておいて損はない。

2．4．慣性の法則

さて、空間には無数の座標系を設定できる。例えば次のようなものが挙げられる。



（1）空間に固定（静止）　（2）空間内を等速直線運動



（3）空間内を加速運動　（4）空間内を回転運動

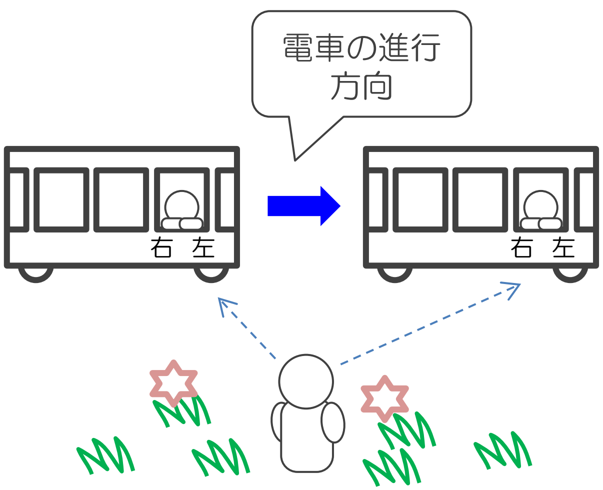
前述の説明と照らし合わせて、このうち **“慣性系”** は（1）または（2）に限られることがわかる。なぜなら、（3）は空間あるいは時間の一様性が保てず、（4）は空間の等方性が保てない。

“慣性系” について、今までは抽象的な話だったので、具体例を挙げて説明してみよう。

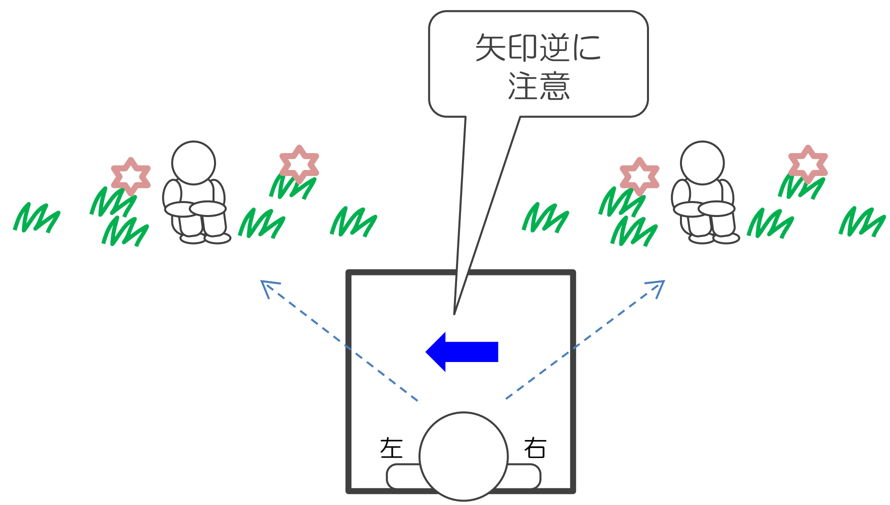
2. 4. 慣性の法則

実はこの慣性の法則、すごいことを言っているのである。
それは「等速で直線的に動いている物体は止まっているのと同じ」ということである。
なんのこっちゃ？？？となると思うので、具体的な例で見ていくことにする。

地面に座っているAさんは、電車の中にいるBさんを見ている。と同時にBさんはAさんを見ている。このとき電車は一定の速度v_sで動いているとする。
まずはBさんが電車の椅子に座っている場合を考える。



AさんからBさんを見る



BさんからAさんを見る

※Bさんの“左”　“右”に着目すればこんがらがらないと思う

2．4．慣性の法則

ここでは二つの座標系を設定できる。一つは地面に固定した座標系Oa、もう一つは電車とともに動く座標系Obである。

Aさんからみた Bさんは電車とともに一定速度$\boldsymbol{v_s}$で動いている。それとは逆にBさんから見たAさんは一定速度$-\boldsymbol{v_s}$で地面とともに動いている。このとき、お互いに自分を基準にとれば自分自身の速度は0である。つまりAさんとBさんのどちらが止まっているか？は、どこを基準にとるかで変わる。さらに、どちらの座標系からみてもAさん、Bさんともに等速直線運動を行う（静止は速度0の等速直線運動）。このとき、Aさん、Bさんともに力は働いていないので、座標系Oa、Obとも慣性の法則を満足する。さらに、電車の速度$\boldsymbol{v_s}$はどんな値でも構わないので**「等速直線運動しているすべての座標系は慣性の法則が成り立つ」**ことがわかる。この関係を**ガリレイの相対性原理**といい、**慣性の法則が成り立つ座標系**を**慣性系**と呼ぶ。「どんな速度でも」成り立つので、慣性系は無数に存在する。

本節最初の「等速で動いている物体は止まっているのと同じ」というのは、「止まっている座標系と等速直線運動している座標系は等価である」ことを言っている。
なお、等速直線運動のことを**等速度運動**とも呼ぶ。

2．4．慣性の法則

では、慣性系ではない座標系は存在するのだろうか？
存在するならばばどんな座標系なのだろうか？

例えば、電車が加速している場合、電車に固定されている座標系もまた加速することになる。このとき、Bさんから見たAさんの速度は変化する。慣性の法則に従えば、電車の外にいるAさんには力が働かなくてはならない。しかし実際のAさんはただ野原に座っているだけでどこからも力を受けていない（正確には地面から体重を支える力は受けているが．．．）。さらには、地面に固定した座標系からAさんを見ても一切動いていない。従って、実際のAさんは運動の状態（今は静止状態）を維持したままである。

結果、加速している座標系上で物体の運動を論じる場合、慣性の法則は成り立たない。このような座標系を**非慣性系**と呼ぶ。その性質については次の節で説明する。

2. 4. 慣性の法則

ここで、力学において最も重要といって過言ではない物理量“**質量**”を導入する。質量は実験によって見出されたもので、質量そのものが何によって生じているのか？についてはわからない（空間のゆがみといわれている）。

“**質量**”は**物体固有の定数**で、「物体に作用する力Fとそれによって生じる加速度aとの比F/a」で求まる。単位は“**[kg]**”で表す。質量は重い、軽いの指標になる。重い物を動かそうとすると大きな力が必要なのに対し、軽ければほとんど力は必要ない。このように質量は「物体の動かしにくさ」=「物体固有の慣性の大きさ」を表す。

ちなみに、“**重量**”と“**質量**”は何が違うのか？
“**重量**”は重力によって生じる“**力**”であり、単位は[N] = [kg m/s^2]である。それに対し質量は[kg]であるから**「重量は質量ではない」**。月の重力は地球の1/6であるから、体重は月へ行くと1/6になる。でも質量は物体固有の値なので月でも地球でも変わらない。よって見た目、体質は何も変わらない。体重が1/6に減った！と喜んでも、ほかのみんなも1/6になるので相対関係は何も変わらない。痩せたければ「RAIOOPへ行け」ということである。ただし、地球上であれば重力はほぼ同じとみてよいので、そのような同一環境下では重量と質量は同じようなもの、と言える。

2. 5. 運動の法則

第二法則：運動の法則

物体の運動の変化は、その物体に働く力に比例し、力の働く向きに生じる

「運動の変化は力に比例」とあるので、まずは“物体の運動”というものを数値化しなければならない。そこで運動を表す量として**“運動量$\boldsymbol{p}$”**を導入する。

物体が質量m、速度$\boldsymbol{v}$で動いているときの運動量を次式で定義する。

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \quad \cdots (2.5-1)$$

イメージとしては、質量の軽い蚊がブ～ンと飛んできて手に乗っても何にも感じない。これは蚊の質量は小さく、速度も大したことがないため運動量が極めて小さいからである。それとは逆にお相撲さんがものすごい勢いで体当たりしてきたらとんでもないことになってしまう（これはこれで痛さをある意味感じないかもしれないが．．．）。これは、お相撲さんの質量が極めて大きく、運動量が大きいためである。
以上のことから、蚊の動きを止めるには大して力は必要なく、お相撲さんの動きを止めるには莫大な力が必要である。この感覚は運動の法則と合致する。

2. 5. 運動の法則

この運動量を用いて、運動の法則を数式化する。

運動量$\boldsymbol{p}$、力$\boldsymbol{F}$とするとき、時間変化は時間微分によって表せるので次式が得られる。

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}\quad\cdots(2.5-2)$$

この(2.5-2)式を運動方程式と呼ぶ。力の単位は[N](ニュートン)=[kg・m/s^2]で表す。この法則では「物体の質量mは一定」が前提である。そのためmを微分の外に出すことができる。

運動方程式は**「“質量×加速度”=運動量変化と“力”は等価である」**と言っている。しかし、“質量×加速度”は“力”である、とは言っていない。あくまで“等価”である。運動方程式の使い方を誤らないようにするために、「左辺は運動量変化を書き、右辺は力を集めて書く」と覚えておくとよい。
運動方程式は「力によって加速度は生じる」、「加速度によって力は生じる」のどちらもが正しいと言っている。

以上から、1.3節の「加速度が力と密接に関係がある」ことが示された。

2. 5. 運動の法則

この“運動方程式”があるからこそ、我々は様々な機械を作って動かせるようになり、便利な世の中を手に入れることができた。
それだけではなく地学、天文学等ありとあらゆる物理現象解明の礎を担っている。それだけ凄い式であるにもかかわらず、その中身はものすごく単純である。
そこがまた凄い！！

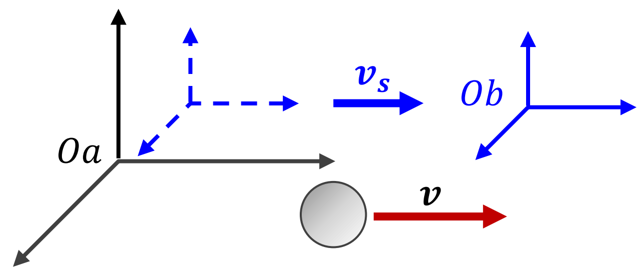
ただ、この功績はニュートンさん一人によって成されたものではない。この功績にたどり着くまでには、ニュートンさんより過去のたくさんの研究成果があり、時には宗教的弾圧を受け犯罪扱いされてしまった人たちの業績があって、初めて得られたものであることを忘れてはならない。

あともう一つ。何にも分からなかった時代にこんなすごい発見をして、昔の人達はすごい！！今の時代にこんなすごい人はいない、と思ってはいけない。現代人はすでに過去の偉人達が構築した理論を、高校生や中学生でも理解できる世の中になっている。それだけ人は進歩している。現代人は過去の人達よりもはるかに高度で難しいことにチャレンジしているのである。そもそもニュートンさんの時代に宇宙には果てがあるとか、ブラックホールが存在するとか、宇宙の形は7つのうちのどれかだ、なんてことはわからなかったのである。「昔はよかった」的な発想は捨てよう。

2．5．運動の法則

ここで2つの座標系Oa、Obを設定し、Oaは慣性系かつ静止座標系であるとする。また、座標系ObはOaに対して速度$\boldsymbol{v_s}$で動いているとする。

いま座標系Oaに対して物体は速度$\boldsymbol{v}$で動いているとする。



座標系Obからみたこの物体の速度を$\boldsymbol{v}'$とおくと

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v_s} \quad \cdots (2.5-3)$$

である。これを両辺時間tで微分すると次式が得られる。

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v_s}}{dt} \quad \cdots (2.5-4)$$

2.4節により座標系Obは、$\boldsymbol{v_s}$が一定であれば慣性系、$\boldsymbol{v_s}$が一定でなければ非慣性系となる。非慣性系では$d\boldsymbol{v_s}/dt$の項があるため、座標系の移動に応じて物体に力が働くことになる．．．が、この力は実際に作用しているものではない。

2. 5. 運動の法則

実はこの非慣性系における現象は、日常で体感している。
車や電車に乗り込むとき、これらは停止している（はずである）。いよいよ出発すると、徐々に速度を上げていく。ある程度速度が上がったらおおむね一定の速度で運行し、目的地に近づくと徐々に速度を下げていき、最後に停止する。
このとき例えば、

- 加速のときは何か進行方向と逆方向に引っ張られる感覚はないだろうか？
- 減速のときは進行方向に引っ張られる感覚はないだろうか？
  特に急ブレーキを踏むと前にはじき飛ばされそうになると思う

これらはどこかから押されて力を受けているのではなく、我々が持つ体重≒質量によって、慣れ親しんだ状態から離れたくない！！という意思のもと、

- 加速のときは加速する前の状態から離れたくない　→　後ろに引っ張られる感じ
- 減速のときは減速する前の状態から離れたくない　→　前に押される感じ

を体感することになる。このように実際に力が作用しているわけではない“見かけの力”を慣性力と呼ぶ。遠心力も見かけの力である。

2. 6. 作用反作用の法則

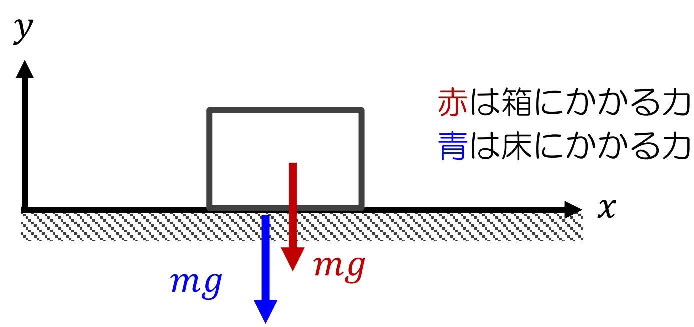
第三法則：作用・反作用の法則

物体1が物体2に力を及ぼすとき、物体2は物体1に対して同じ大きさで逆向きの力を及ぼす

これは先ほどの第一、第二法則とは少し毛色が異なる。
床の上に質量mの箱を置いたとする。このとき、箱は床をmgの力で押していることになる。このとき、オカルト現象でもない限り箱は静止している。そこで、この箱についての運動方程式を作る。加速度は0だがここではあえて$\boldsymbol{a}$として

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} \quad \text{成分表示で} \quad m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

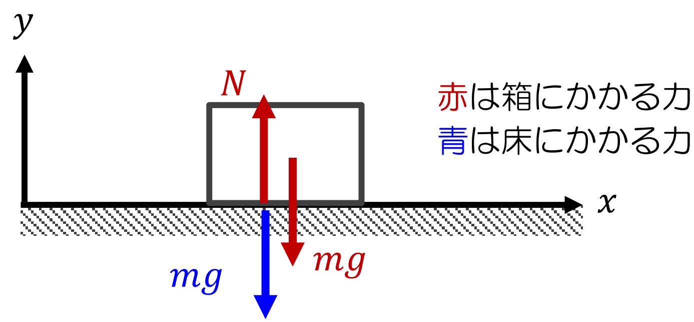
となる．．．。



あれ？これだと加速度は床に向かってgだけ加速するため、箱は床にめり込んで加速しなければならない。でも実際の箱は静止している。

2. 6. 作用反作用の法則

ということは、箱に加わる力が何か足りない。箱を支えているのは床なので、床から箱に力が作用している、と考えるのが普通であろう。その力をNとする。



この状態でもう一度箱に対する運動方程式を立て直す。加速度aは0であるから

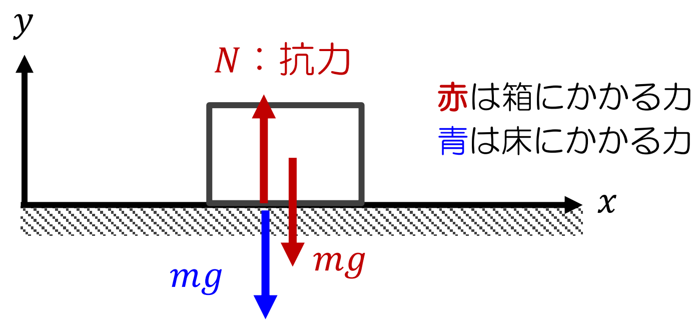
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} \quad \text{成分表示で} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y - mg \end{pmatrix}$$

つまり、$N_y = mg$

つまり箱は床に力mgを**作用**し、**反**対に床は箱に力$N_y = mg$を**作用**する。この関係が"**作用反作用の法則**"である。**反作用**は**作用**に応じて生じるので、箱の質量が変われば その大きさもそれに応じて変化する。なお、作用反作用の関係は接触している力だけでなく、空間を隔てて引き合う力に対しても成り立つ。ということで、万有引力の法則に作用反作用の法則が組み込まれている。

2. 7. 抗力

前節の作用反作用のところで見たように、机の上に置いた物体には机から力が働いている。これは、箱が机を押す力に対して抗う力であるから **“抗力”** と呼ぶ。抗力は作用があって初めて働くので反作用力である。

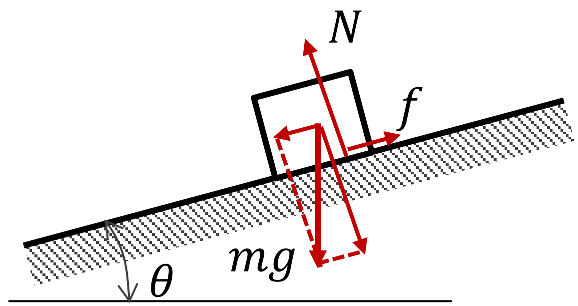


従って、**物体の運動が定まらない限り抗力は求まらない**。これは抗力を考える上で非常に重要な性質である。

どんな時に抗力が働くか？
例えばロープウェイや電車、ジェットコースターを思い浮かべてほしい。これらはロープや線路から離れることはない（離れた瞬間、恐ろしい結末を迎えてしまう）。しかし実際は、ロープや線路から離れようとする力が日常茶飯事的に働いており、抗力を上手く使って離れるのを阻止するような構造にしている。これを抽象的に言えば、面や線の上に拘束された状態で運動している。このような運動を **“拘束運動”** と呼ぶ。

2. 7. 抗力

ここで抗力が具体的にどのように発生するか？についてみることにする。
斜面上に静止している質量mの箱がある。斜面の傾斜角はθとする。

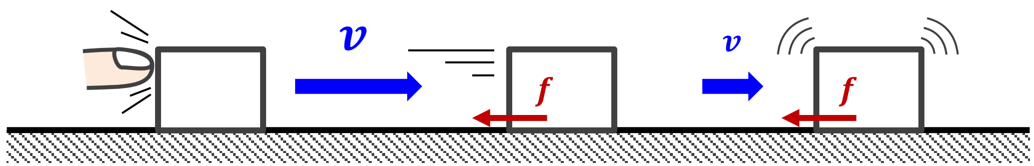


このとき、箱が斜面を押す力は$mg\cos\theta$であるから、斜面はその力に対して抗力$N=mg\cos\theta$を生じる。この抗力は斜面に対して垂直に働くので**“垂直抗力”**と呼ぶ。また、斜面を滑り落ちようとする力 = 斜面に平行な力は$mg\sin\theta$である。今、箱は斜面に対して静止しているので、これとは反対向きに$f=mg\sin\theta$の力が作用しなければならない。この接線方向に働く抗力fを**“接線抗力”**と呼ぶ。

垂直抗力は、床を押す力に対して床が壊れない限り力を返してくる。しかし接線抗力には上限がある。例えば傾斜角が大きくなると箱は滑り出し、床がツルツルなら小さな傾斜角でも箱は滑り出す。従って、垂直抗力と接線抗力でその発生メカニズムは異なる。
接線抗力については次節で詳しく見ていくことにする。

2. 8. 摩擦

接線抗力は物体の動きを妨げるように働く。
前節の例は、滑り落ちようとする箱に、それとは反対の接線抗力が床から働いていた。
それ以外にも動いている物体に対して接線抗力は働く。例えば下図のように箱を押すと、動き出すがいずれ止まる。



このとき箱を減速させているのは、箱と床が接触し、擦れることで発生する接線抗力である。このように、物体同士の接触によって相対運動を妨げる力が働く現象を“**摩擦**”と呼び、その力を“**摩擦力**”と呼ぶ。

摩擦力は前頁の動き出す前に働く“**静摩擦力**”と、動いている最中に働く“**動摩擦力**”の二種類がある。特に物体が動き出す直前の摩擦力を“**最大静摩擦力**”と呼び、それを超えて力を加えれば物体は動き出し、動摩擦力が働くことになる。

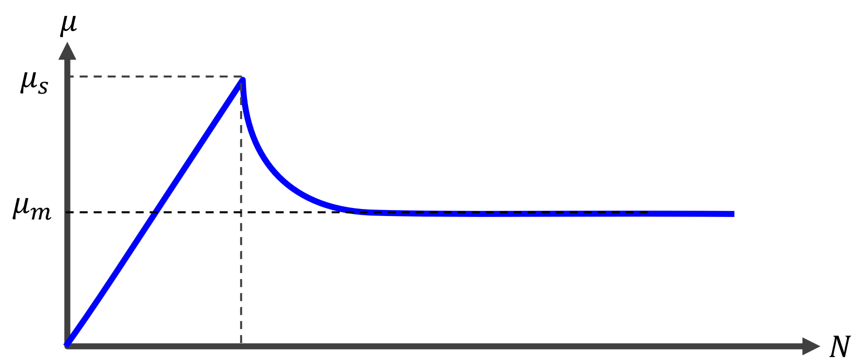
2. 8. 摩擦

摩擦の発生メカニズムは未知な部分が多い。その中で、最大静摩擦力と動摩擦力に関しては、**垂直抗力と比例**することが**実験的**にわかっている。

$$f = \mu N \quad \mu：摩擦係数 \quad \cdots (2.8-1)$$

摩擦係数は、最大静摩擦に対応した**最大静摩擦係数μ_s**と、動摩擦に対応した**動摩擦係数μ_m**がある。通常“$\mu_s > \mu_m$”の関係が成り立つ。最大静摩擦は垂直抗力がわかれば求まるが、それより小さい静摩擦力は反作用力であり、運動が決まらない限り求まらない。

なお、垂直抗力と摩擦係数の間には次のような関係が成り立つ。



摩擦に関する力学のお作法として「滑らかな面」「ツルツルの面」といった表現は“摩擦なし”として扱い、「粗い面」「ざらざらの面」といった表現は“摩擦を考慮せよ”という意味になる。これはお受験時に必要な知識なのでここで記しておく。

2．8．摩擦

さて、摩擦というと、一般には悪者のイメージが強い。
しかし摩擦がなければ我々は歩くことすらできない。少し濡れている氷の上を歩こうとすると足がツルツルすべって歩くのもままならないのは、濡れた氷の摩擦係数が非常に小さいためである。ねじや釘は摩擦があって初めて締結機能を成す。タイヤと道路に摩擦があるから車は走ることができ、ブレーキは摩擦力を上手く使った機械である。
このように、我々は摩擦の恩恵を受けて生活しているにもかかわらず、ちょっと思い通りにならないことがあれば「摩擦が悪い」といって邪魔者扱いする。我々はなんと自分勝手な生き物なのか！！と摩擦を通じて思い知る必要がある。

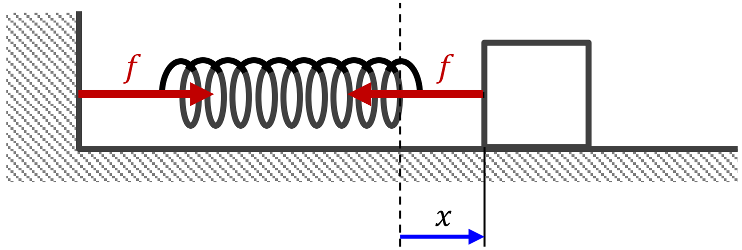
なお、摩擦に関する重要な性質はまだあるが、それはエネルギーの話のところで触れることにする。

2．9．フックの法則と張力

ばねは伸ばせば縮もうとする力が、縮めれば伸ばそうとする力が働く。この力を**“復元力”**と呼ぶ。復元力fはばねの伸び縮みの量xに比例する。この関係を**“フックの法則”**と呼び、このような性質を**“弾性”**という（フックの法則は連続体の力学を用いれば証明できるので公理ではない）。

$$f = -kx \quad (k > 0) \quad \cdots (2.9-1)$$

このときの比例定数をkで表し、これを**ばね定数**と呼ぶ。



ばねの片方を引っ張ると、作用反作用の法則により反対側の端っこにも同じ力が働く。これは伸びない“ひも”にも言えることである。このときひもに働く力を**“張力”**と呼ぶ。現実には伸びない“ひも”なんて存在しない。しかし伸びの小さいひもを扱う場合は、このような近似で十分事足りる。