１．物体の運動

１．１．位置とベクトル

１．２．速度と微分積分

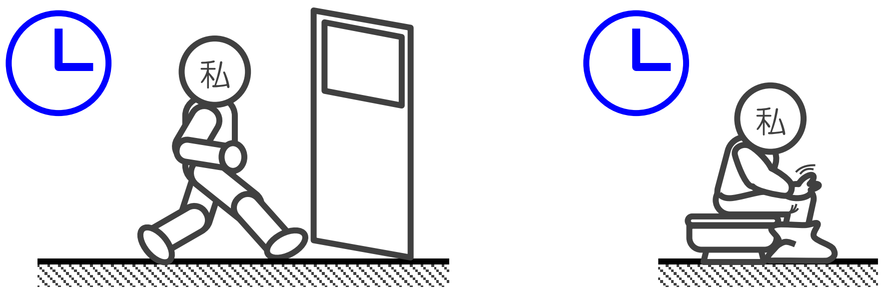
１．３．加速度

１．４．微小変化の意味

1．物体の運動

“運動”とは「物体が時間とともに位置を変える」ことである。

ここで重要なのは、物体は位置を変えるとき必ず時間も変化する、ということである。もし時間の変化なしに位置を変えることができるなら、例えば私は教室にいるのと同時にトイレにもいることができる。つまり、同時刻に私は二人いることになる。そんな恐ろしいことがあっていいのだろうか？

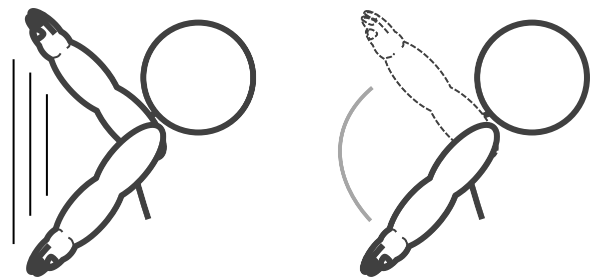


同じ時刻に私が二人いる？？？

同時刻に二人の私が存在するなんてことはないので、位置変化には必ず時間変化が伴う。

1. 物体の運動

ということは「位置を変えるのにどのくらい時間がかかったか？」で運動の勢いがわかるはずである。例えば、腕を思いっきり振り下ろすのと、じわ～っと振り下ろすのとを思い浮かべてほしい。



この運動の勢いは**「単位時間あたりに位置をどれくらい変えられるか？」**と言い換えることができ、これを**“速度”**と呼ぶ。そうすると、速度に時間を掛けることで「物体は将来どこまで動くのか？」を予測することができる。

以上の内容から“力学的な状態が決定される”とは、**「ある時点での物体の位置と速度を同時に知ることができれば、それ以降の運動を予測できる」**ことである。これは**人類の経験によって得られた考え方**であり、証明は不可能である。力学はこの考え方を前提に理論構築されている。

1．物体の運動

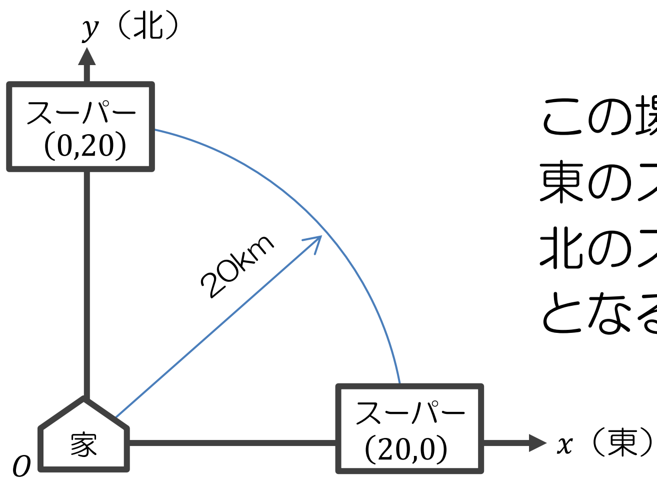
このように証明は不可能であるものの、受け入れなければならない前提のことを“**公理**”と呼ぶ。ただ、公理という言葉を物理学で使われることはあまりない。これに該当する言葉として“**原理**”がある。しかし、物理学の発展に伴い過去に原理と称されたものが原理ではなくなっている場合がある。そのため、原理という言葉は混同を生むことがある。
本書では、通説で“原理”と表現されるものはそのままそれを使い、証明不可能で受け入れなければならないものを明確に説明するとき“**公理**”として表現する。

さて、少し話がそれたのでもとに戻そう。
物体を動かすときの勢いは、ふつう時々刻々変化している。例えば、電車は発車していきなりトップスピードで走れない。徐々にスピードを上げて加速し、止まるときは徐々にスピードを下げて減速する。このように速度も時間とともに変わる。この速度変化を“**加速度**”と呼ぶ。減速は負（-）の加速とみればよい。
実はこの加速度、力と密接に関係している。加速度と力の関係を表すものが運動方程式である。物体の位置と速度は加速度を介して力と連携されている。運動方程式の詳細については2章で説明する。

1．1．位置とベクトル

Aさんは、家から20km離れたスーパーへ買い物に行こうと思っている。

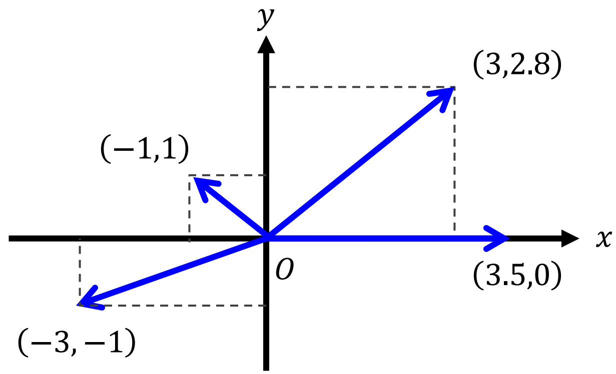
ところが、Aさんの家から20km離れたスーパーが東側と北側に2軒ある。そのため、Aさんがどちらのスーパーへ行こうと思っているか？を知るには距離だけでなく方角（方向）も知る必要がある。ただ、方向を考慮するといっても“北”や“東”といった言葉を使うのは数学的に扱いずらい。そこで、家を基準に東西方向の距離$x$kmと南北方向の距離$y$kmをまとめて(x, y)で表すことにする。



この場合、家の位置は(0,0)、東のスーパーの位置は (20,0) 、北のスーパーの位置は(0,20)となる。

1．1．位置とベクトル

このように定義した(x, y)は、平面上のあらゆる点の位置（任意の点）を表せる。



この平面上の位置(x, y)を**座標**、方向を決める2つの基準軸（ここでは東西方向と南北方向）を**座標軸**、座標軸の本数を**次元**、位置$(0,0)$を**原点**と呼ぶ。さらに、座標を表す系＝システムのことを**座標系**と呼ぶ。今回は座標軸が2本あるので2次元座標系である。

上図をみてもらうとわかるように、この平面上の任意の座標(x, y)は、原点Oから点(x, y)に向かう矢印線の意味も持つ。この座標(x, y)を**位置ベクトル**と呼ぶ。
ここで突然"**ベクトル**"という言葉がでてきたので少し補足しよう。

1．1．位置とベクトル

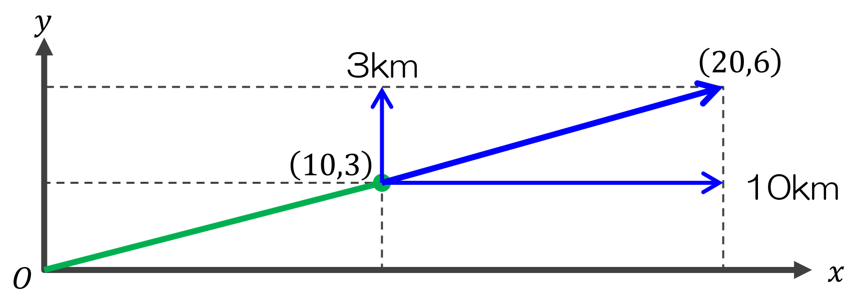
ベクトルとは「加法の公理とスカラー倍の公理※を満足する数の組」である、が細かいことは気にしなくてよい。

※：気になる場合は線型代数のページを参照

ベクトルの足し算は、座標の各成分ごとに計算する（なおベクトルは縦書き、横書きどちらでも構わない）。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\text{の和：}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \quad \cdots(1.1-1)$$

例えば地点(10,3)から、x方向に10km、y方向に3km動く場合、



$(10,3)+(10,3)=(20,6)$

で表現できる。このとき移動分も数の組(10,3)で表せ、位置を変えるベクトルであることから変位ベクトルと呼ぶ。

そもそも、矢印線は向きと大きさという幾何学的な意味を持つ（有向線分という）ので、幾何ベクトルとも呼ぶ。

1．1．位置とベクトル

さて今回の例では、位置ベクトル（緑線）と変位ベクトル（青線）はともに(10,3)である。つまり(10,3)となるベクトルは、位置ベクトルや変位ベクトルであることに関係なく、幾何学的に全く同じものである。つまり、幾何ベクトルは**「平行移動に対し不変」**である。

最後にベクトルの大きさについて説明する。ベクトルの大きさは**「有向線分の長さ」**であるから、その成分を三平方の定理にあてはめて求めることができる。ベクトル$\boldsymbol{r}$の大きさはベクトルに絶対値記号を付けて表し、

$$\boldsymbol{r} = (x, y)\text{のとき、}|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cdots (1.1 - 2)$$

1．1．位置とベクトル

以上の内容をまとめると次のようになる。

（1）位置は“距離”と“方向”が同時に分かるよう表現しなければならない。
（2）座標系を設定することで“距離”と“方向”を同時に表現できる。
（3）“距離”と“方向”を同時に表現できる数の組(x, y)を位置ベクトルと呼ぶ。
（4）移動もベクトルによって表せ、変位ベクトルと呼ぶ。

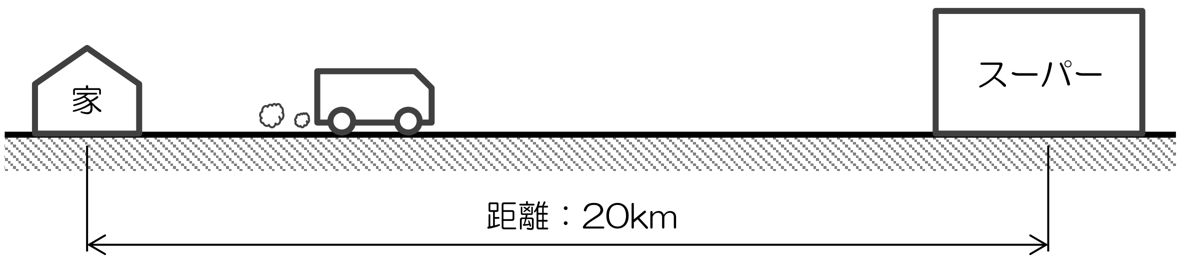
今までは二次元(x, y)を例に話をしてきたが、我々が暮らす三次元(x, y, z)でも成り立つ。我々が体験する現象は三次元空間でのことであるから、本来は三次元で話を進めるべきである。ではなぜ二次元で話を進めたか？といえば、単純に話を簡単にするため、もっと言えばズルして横着したかったからである。従って時と場合によってはさらに次元を落として一次元で話をすることもある。

なお、イメージはわかないが、四次元、五次元・・・とさらに高次元でも今までの話は成り立つ。が当面はこのような高次元の話は必要ない。

1．2．速度と微分積分

まずは速度を簡単に理解するために一次元で話を進める。つまり、前後方向は気にするが、東や北といった方角は考えない。

先ほどの続きで、Aさんが家から20km離れたスーパーへ20分かけて買い物に行ったとする。このときのAさんの行動を逐一把握したい（決してストーカーではない）。



このとき、Aさんは1分あたり 20[km]÷20[分] = 1[km/分] のペースで移動したことになる（1時間あたりに換算すれば、20[km]×(60[分]÷20[分]) = 60[km/時]）。このように、単位時間（1時間、1分、1秒など）あたりに移動する距離を **“速度”** と呼ぶ。一般式で表す場合、移動する距離L、移動にかかった時間tとすると、速度vは次式で求められる。

$$v = \frac{L}{t} \quad \cdots (1.2-1)$$

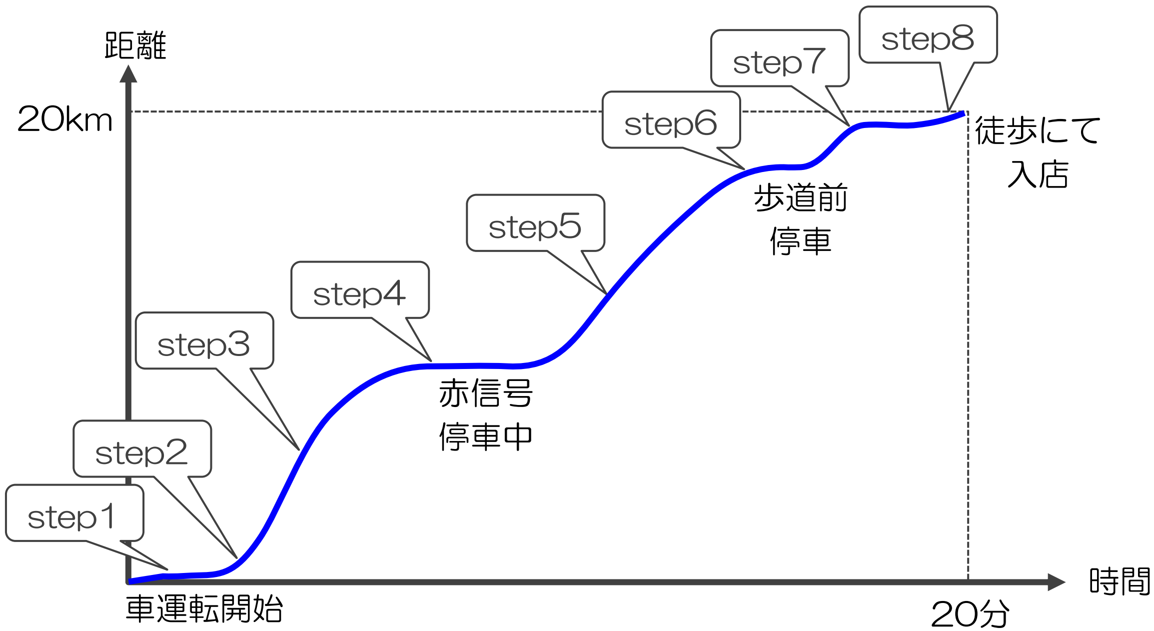
1．2．速度と微分積分

ところで、Aさんは常に1分あたり1kmのペースで移動していたのだろうか？
実際の足跡をたどってみよう。
前提として、移動にかかった時間20分は、家から出る時間を0とし、スーパーに入店するまでの時間とする。

step1）まずは車のカギを開け、車に乗り込む
step2）車を駐車場から出す。
step3）道路に出て車を走らせる。
step4）赤信号につかまり車を停止させる。
step5）青信号になったので車を走らせる。
step6）スーパーの駐車場に入るのに歩道を渡るため、いったん停止する。
step7）スーパーの駐車場に車を止める。
step8）車を降りて歩いてスーパーに入店する。

1．2．速度と微分積分

先ほどの各Stepで進んだ距離を、横軸：時間、縦軸：移動距離で表すと、次のようなグラフになる。

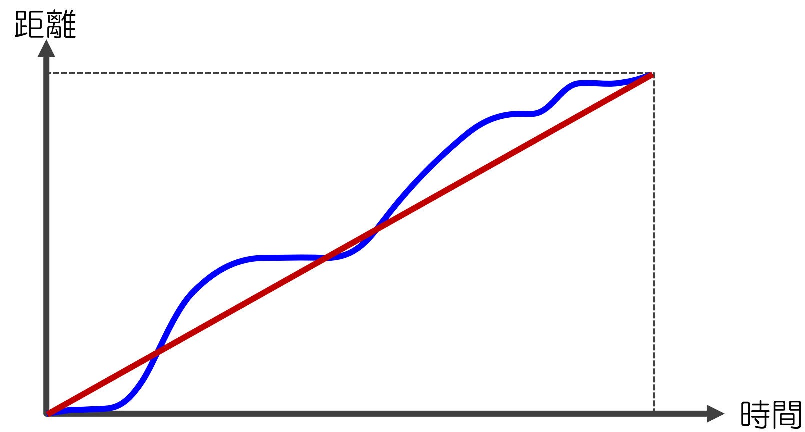


このように、実際は一定のペースで移動することはなく、必ず**“変化”**している。
従って、最初に定義した“速度”は平均的な移動ペースであって、厳密に言えば**“平均速度”**なのである。（1.2-1）式で定義された速度が平均速度であることを明示するため、vの頭に“-”をつけて次のように表すのが一般的である。

$$\bar{v} = \frac{L}{t} \quad \cdots (1.2-2)$$

1．2．速度と微分積分

先ほどのグラフにもう一度戻って、平均速度で移動した場合の線を追加して赤色で描くと、次のようになる。

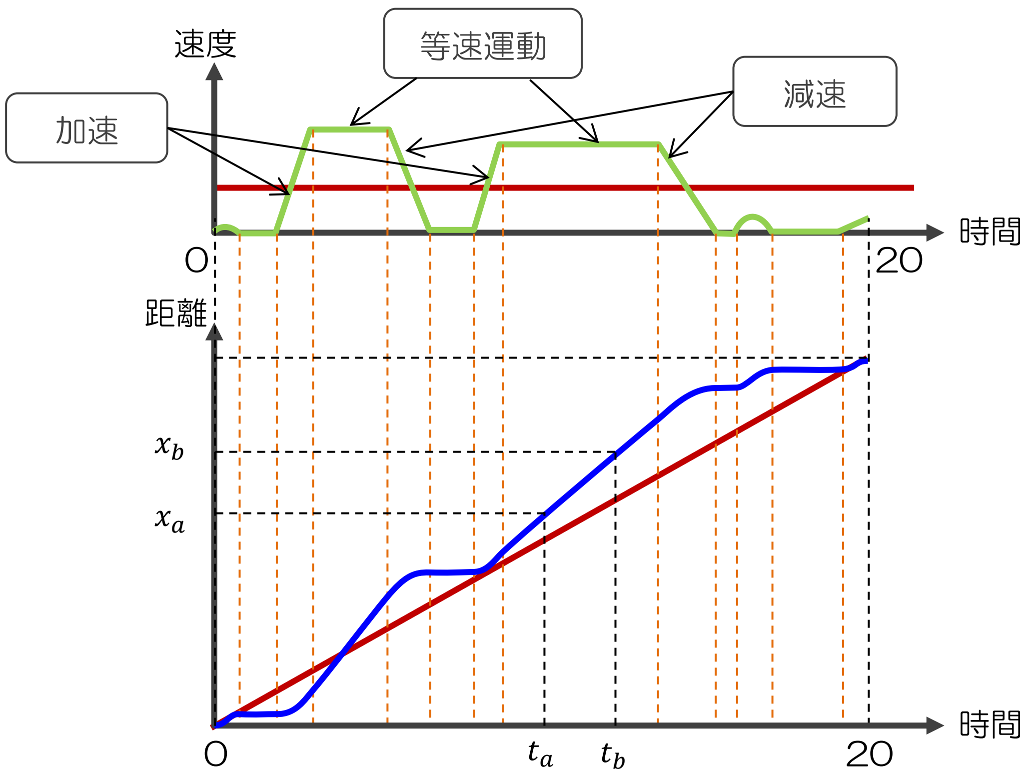


実はAさんが家を出て1分後どこにいるか？を平均速度だけで求めると、家から1km離れたところにいなければならない。ところが実際はせいぜい車にエンジンを掛けて、さ～動かそう、というぐらいしか移動していないはずである。

残念ながら平均速度がわかったところで、Aさんがある時点でどこにいるか？は特定できない。せいぜい「占いよりはまし」程度の正確性しかなく、物理学の目的に反し面白くない。
しかし、もしAさんの移動ペースが時々刻々わかれば、Aさんがどの時点でどこにいるか？が正確にわかるはずである。

1. 2. 速度と微分積分

そこで登場するのが **“瞬時速度”** である。これは「ある時点での速度」である。車や電車のスピードメーターを思い浮かべてほしい。スピードメーターの針は時々刻々動いているはずである。つまり、時々刻々速度は変化する → 時々刻々の速度が存在する、ということである。横軸：時間、縦軸：速度とするグラフを描くと以下のようになる。



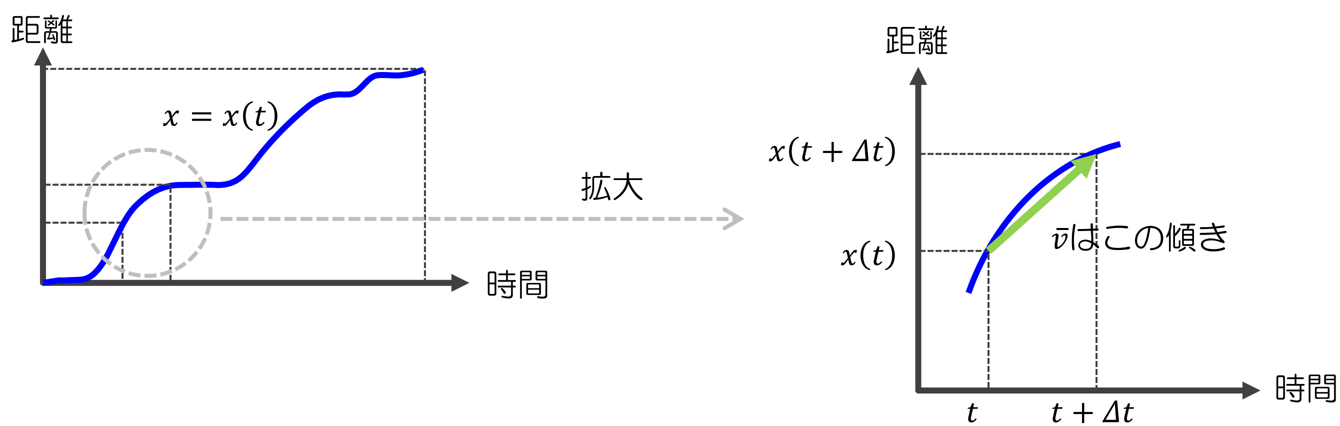
1．2．速度と微分積分

ここからいよいよ“微分”の話に入る。瞬時速度は微分によって定義される。

その前に、Aさんは“ある時刻で家~スーパーの間のどこか”にいることがわかっているので、Aさんがいる位置xは時刻tの関数$x(t)$で表せる。
Aさんが、時刻tから$t+\Delta t$の間に位置$x(t)$から$x(t+\Delta \mathrm{t})$に移動するときの速度は（1.2-2）式から求まる。

$$\bar{v}=\frac{x(t+\Delta \mathrm{t})-x(t)}{\Delta t} \quad \cdots(1.2-3)$$

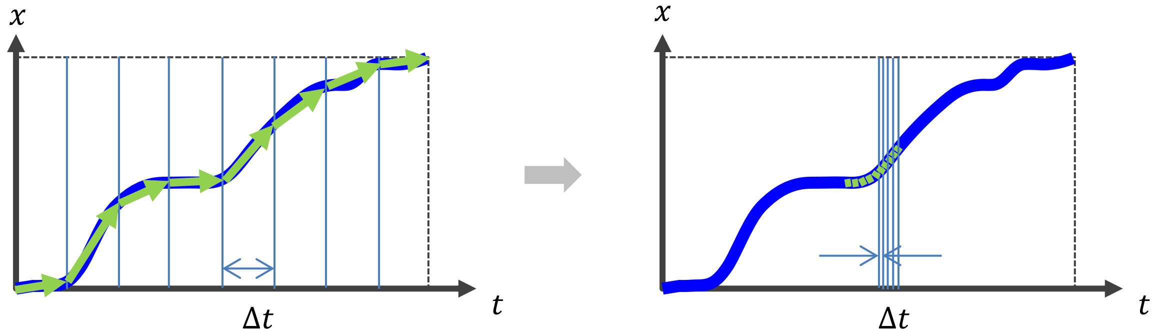
この関係を距離と時間のグラフ上に図示すると下図のようになる。



つまり短く区切った平均速度$\bar{v}$は、関数$x(t)$のその区間における“勾配（傾き）”を意味する。

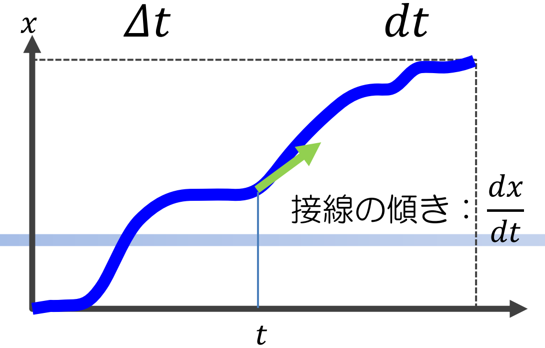
1．2．速度と微分積分

関数$x(t)$をΔtでいくつかの区間に分割すると、カクカクの線（黄緑線）で近似できる。この区間Δtを小さくするほどカクカクはなめらかになり、0に限りなく近づけば黄緑線は青線そのものになる。このような微小分割を「**無限小**分割」という。



無限小分割でも（1.2-4）式は成り立つ。ただし、Δtが0に限りなく近いことから$\bar{v}$はもはや平均ではなく、ある時刻 = **時点**tでの速度vになる。この速度vこそが **“瞬時速度”** である。先ほどの話から瞬時速度vは **“関数$x(t)$の接線の傾き”** の意味を持つ。このように、関数を0に限りなく近い幅 = 無限小で **“微細に分割する”** ことを **“微分”** と呼び、数学的な表記は次のようになる。

$$v = \lim_{t \to \infty} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \cdots (1.2-4)$$



1．2．速度と微分積分

微分の計算は次の通りである。

$$x(t) = x^n \text{のとき、} \frac{dx(t)}{dt} = nx^{n-1} \quad \cdots (1.2-6)$$

なぜ上式のようになるのか、簡単な例として、関数$x(t) = t^2$の場合で考えてみる。（1.2-5）式に$x(t) = t^2$を代入すると、次のようになる。

$$v = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \quad \cdots (1.2-7)$$

これを地道に計算すると、

$$v = \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

になる。今、Δtは限りなく0に近いのでΔtは無視でき、

$$v = \frac{dx}{dt} \cong 2t \quad \cdots (1.2-8)$$

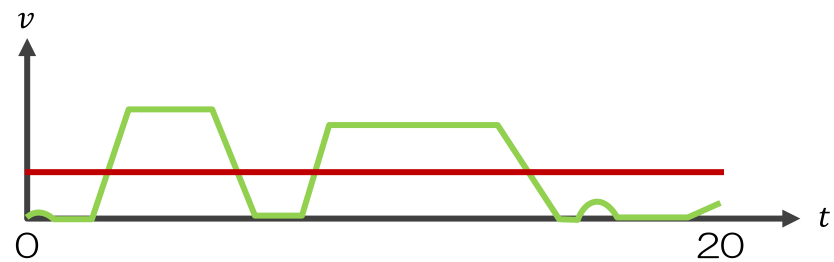
を得る。これは（1.2-6）式に合致する。

その他さまざまな関数の微分形については数学の本を参照願う。

1. 2. 速度と微分積分

これでようやく“瞬時速度”を求めることができた。
しかし、そもそも瞬時速度を求める目的は「Aさんがスーパーに行く途中、どの時刻にどの位置にいるか?」を正確に把握するためである。本当にそれが実現できることをこれから確認する。ここでは**“積分”**の話が登場する。

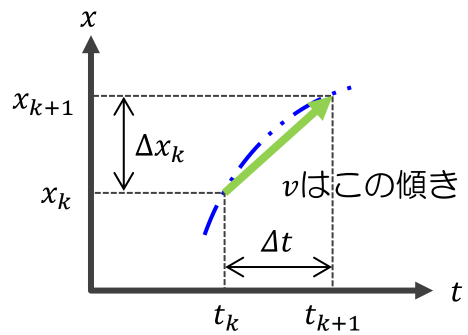
速度の時間変化についての話に戻るとしよう。
以前描いた横軸:時間、縦軸:速度のグラフに再登場してもらう。



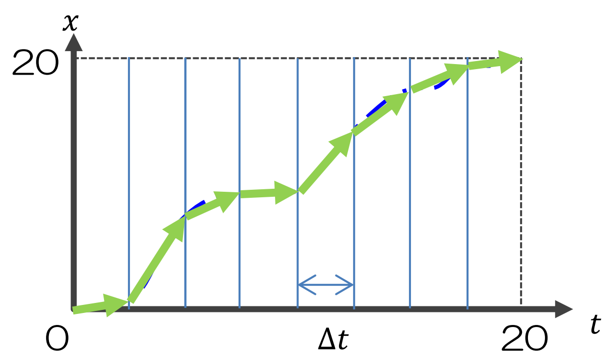
このグラフには、スーパーに行く途中のAさんの瞬時速度が時々刻々記録されている。
つまり、瞬時速度は時間tの関数$v(t)$として表せる。それに対し位置は、時刻0のとき家(距離0)、その20分後にスーパーに入店(距離20km)が分かっているだけである。

1．2．速度と微分積分

まず、20分間をn個の区間に分割する。このとき、1区間の時間を$\Delta t(= 20/N[分])$とする。ある時刻$t_k(= k\Delta t, k = 1,2,\cdots,N)$でのAさんの瞬時速度は$v_k = v(t_k)$で決まるから、時刻が$t_k$から$t_{k+1}$進んだ時の移動距離は$\Delta x_k = v_k \Delta t$である。



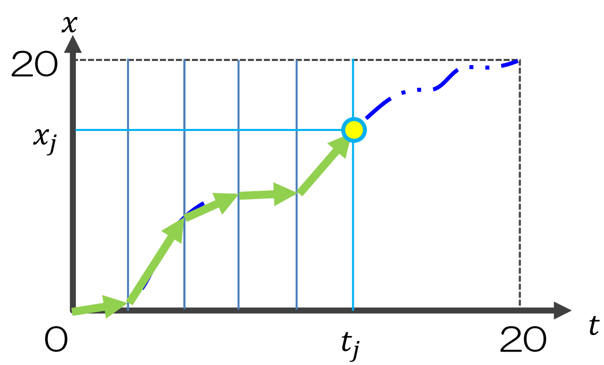
これを$k = 1$からnまで積み上げると、カクカクの線ではあるけども、Aさんが移動した軌跡、つまり関数$x(t)$を近似的に作ることができる。



1．2．速度と微分積分

実はこの微小区間Δx_kを足し合わせる操作は、微分のときに行った「関数$x(t)$を大きさΔtで分割してカクカクの線（黄緑線）で近似した」操作の逆を行っただけである。

さて、本題である「Aさんがある時刻t_kでどの位置にいるか？」は、各区分の移動距離Δx_kを時刻0〜t_k分足し合わせればよい。このとき、Δx_kは数列であるからΣ記号（数列の足し算）が使える。



$$x_k = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_k$$

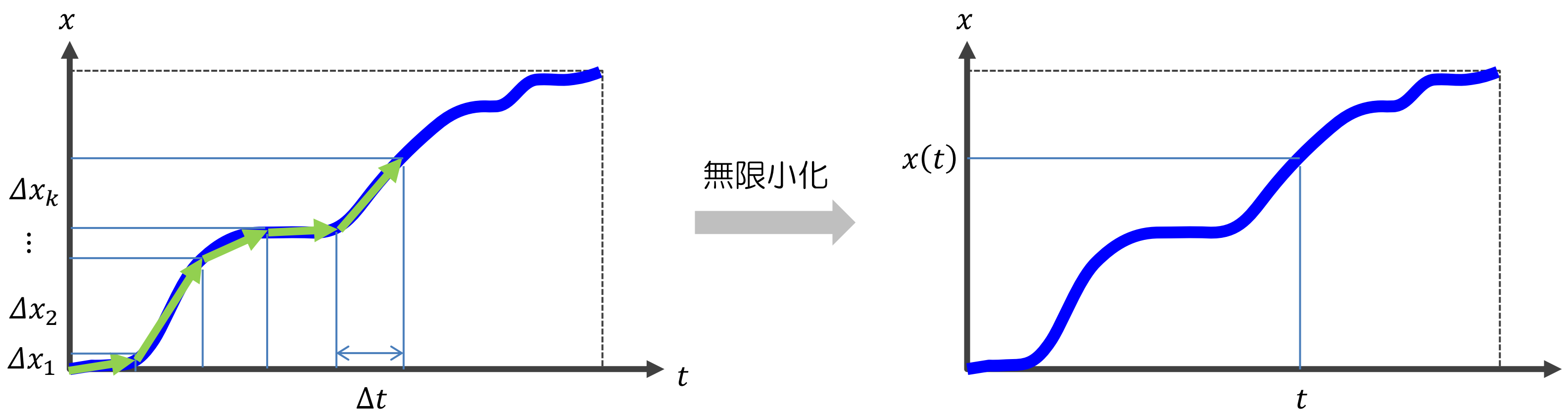
$$= \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} v_i \Delta t \qquad \cdots (1.2-9)$$

ということは、速度の時間関数$v(t)$が分かっていれば、ここでも限りなく0に近づける操作を行い、微分と逆の操作を行うことでAさんの位置を近似ではなく**正確に**予測できる、ということが容易に想像できる。

1．2．速度と微分積分

そこで、（1.2-9）式の微小量Δt、Δx_iをdt、dxで書き直そうと思うのだが、そうすると残念ながら添字のiが式から消えてしまうため、Σ記号が使えない。なぜなら、Σは添字iが1からjまでの変数（今の例だとΔx_iやv_i）を足し合わせる、という意味であるから、iを含まない変数に対してΣを適用すると次のようになってしまう。



数列：$x_k = \sum_{i=1}^{k} v_i \Delta t$ ○

関数：$x(t) = \sum_{i=1}^{k} v(t)dt = kv(t)dt$ ×

右の×計算は、本来の意図と異なる計算になるため適当ではない。

1．2．速度と微分積分

そこで、Σに変わる記号として次のものを導入する。

$$x(t)=\int_0^t v(t)dt \quad \cdots(1.2-11)$$

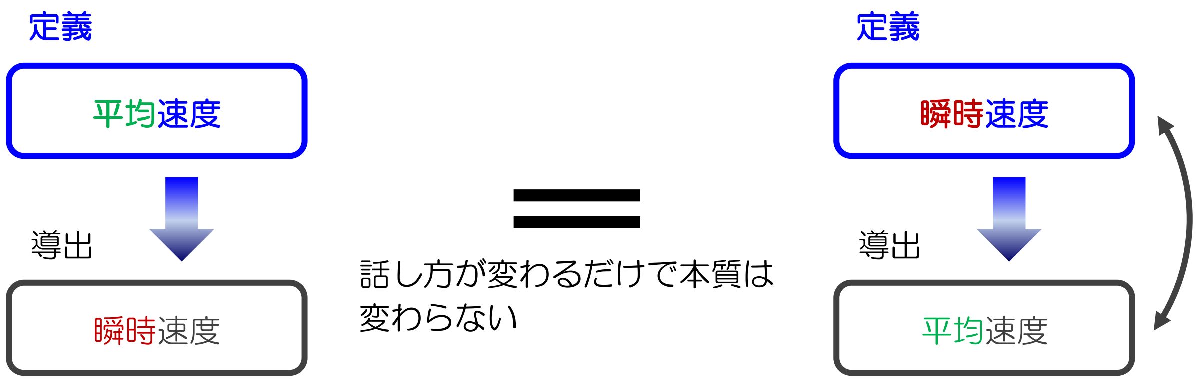
この記号をインテグラルまたは積分記号と呼ぶ。また、この計算は微分の逆を行う。このように微小区間の値を **“積み上げる”** 操作を **“積分”** と呼ぶ。

速度関数$v(t)$がわかれば、積分によって任意の時刻でのAさんの位置が特定できる、つまりは$v(t)$を積分すると位置の関数$x(t)$が得られる、ということになる。

1．2．速度と微分積分

以上、速度と微分積分について長々と説明を行ってきた。

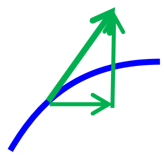
今回の説明では“平均速度”を出発点として“瞬時速度”を定義した。これは一般的な説明手順であり、実体験とリンクしやすく共感を得やすい。しかし定義の出発点を入れ替えて“瞬時速度”から話を進めても何ら問題はない。むしろその方が数学に頼れるので話はシンプルである。



数学で証明されている内容は一般化されており、単純に受け入れてしまえばよい。注意すべきは、着目している現象に対して適用する数学の条件が当てはまっていることである。「数学に頼ればシンプルかつ楽になる」というのはそういった点からきている。もちろん、数学的な内容に興味があれば深入りする方が良いし理解も深まる。ただ、かならずしもそれが必要ではないので、**数学による手抜きは大いに活用しよう**。

1．2．速度と微分積分

ということで、微分積分は数学によって一般化されており、定義とその意味について何ら疑う必要はない。微分はある曲線の接線の傾きを表し、横軸単位長さ当たりに対する縦軸移動量という意味を持つ。横軸を時間とすれば、微分は「単位時間あたりに進む距離」であり、これは **“瞬時速度”** そのものである。
また微小移動量はvdt であるから、これを時刻0〜tで積分すると位置関数$x(t)$が求まる。



$$v = \frac{dx}{dt} \quad \cdots(1.2-12)$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt \quad \cdots(1.2-13)$$

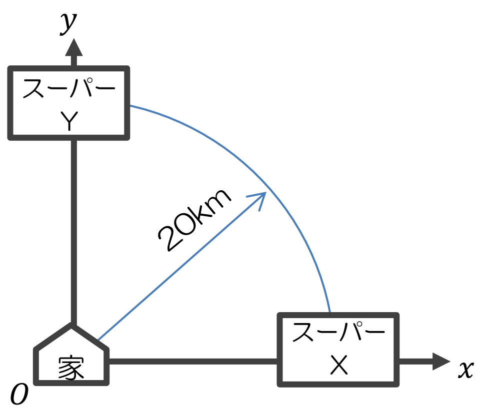
このように、数学ですでに明確に定義・証明されていることを受け入れれば、物理学は非常にシンプルに理解することができる。今回とりあげた微分積分の持つ本質的な意味は次のとおりである。

> **微分**：曲線を**細かく分割**することで関数の接線の勾配（傾き）を求める
> **積分**：曲線の勾配から求まる**微小量を積み上げる**ことで関数を構築する

1．2．速度と微分積分

さて、そもそものお題はAさんがスーパーへ買い物に行くときの行動を逐一把握することである。従ってAさんが東と北、どちらのスーパーへ向かったかは重要な問題である。

東にあるスーパーをX、北にあるスーパーをYとする。Aさんは混雑が嫌いなので、大安売りのチラシが入ったスーパーYを避け、スーパーXへ向かったのである。
すると、Aさんはx軸方向にのみ速度成分を持つことになる。また、もし間違ってスーパーYへ向かってしまうと、Aさんはy軸方向のみに速度成分を持つことになる。ということで、速度成分を見るだけでAさんが向かった方向がわかる。



スーパーXへいくとき：$(dx/dt, 0) = \begin{pmatrix} dx/dt \\ 0 \end{pmatrix}$

スーパーYへいくとき：$(0, dy/dt) = \begin{pmatrix} 0 \\ dy/dt \end{pmatrix}$

なお、ベクトルは横書きでも縦書きでもどちらでもよいが、一般には縦書きが用いられることが多い。

1．2．速度と微分積分

ただ、家から出てスーパーの入口まで一直線で行けることはほとんどない。道路は曲がっているし、スーパーの駐車場は道路上にないため必ず曲がる必要がある。従って、前に見たような一直線の運動ではなく、平面上で曲線を描くことになる。
その結果、x方向、y方向をあちこち向きながら走るので、速度成分もまたx成分、y成分の両方を持つのが現実である。

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} \quad \cdots (1.2-14)$$

Aさんの速度が時間の関数$\boldsymbol{v}(t)$で与えられるとき、移動の軌跡は正確に把握できる。
この場合x、y軸とも時間の関数であり、各方向に対して積分すればよい。

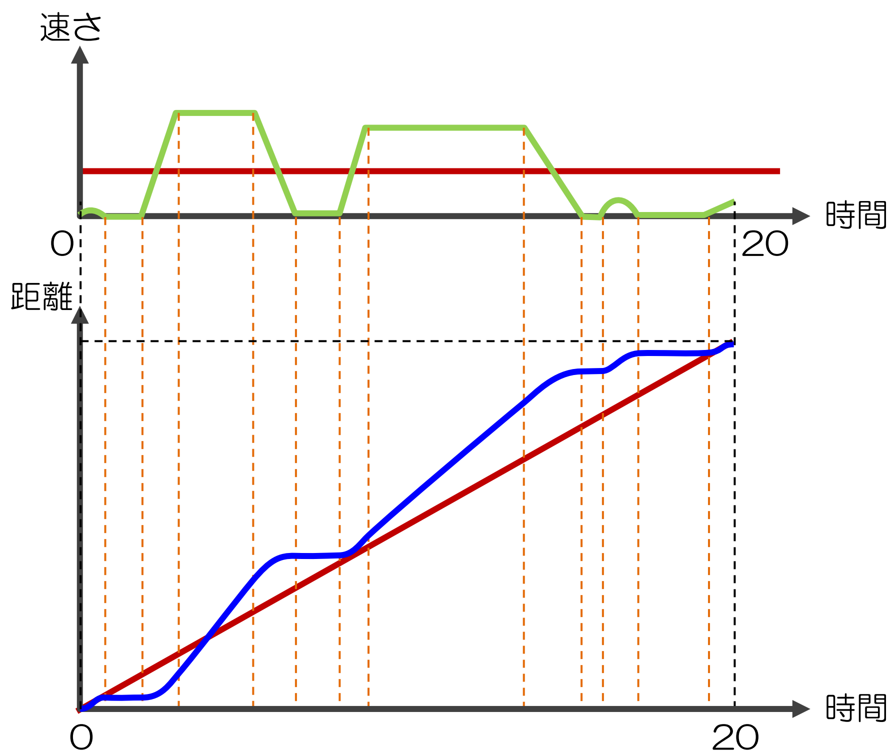
$$\boldsymbol{r}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(t)dt \rightarrow \ x(t) = \int_0^t v_x(t)dt\text{、}y(t) = \int_0^t v_y(t)dt \quad \cdots (1.2-15)$$

今は二次元を例に挙げたが、三次元で成り立つ。

$$\text{三次元の場合：}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} \quad \cdots (1.2-16)$$

1. 3. 加速度

例えば、車や電車に乗り込むとき、これらは停止している。出発すると徐々に速度を上げ、速度が上がったらおおむね一定の速度で運行する。目的地に近づくと徐々に速度を下げていき、最後に停止する。速度を上げていくことを **“加速”** 、速度を下げていくことを **“減速”** という。特に減速は負（マイナス）の加速とも言える。
1.2節のAさんの移動例でも見たように、実は一定の速度で動くというのは非常に難しい。



1．3．加速度

つまり、速度は時々刻々変化している。そこで、速度$\boldsymbol{v}$の単位時間あたりの変化を“加速度$\boldsymbol{a}$”と定義し、

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad \cdots (1.3-1)$$

で表す。加速度はベクトルである。
速度$\boldsymbol{v}$は位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の時間微分であるから次のようにも書ける

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad \cdots (1.3-2)$$

（1.3-1）式は速度と位置の関係と同じ形である。ということは、加速度の関数がわかれば時々刻々の速度がわかる。今回は不定積分を使って書く。

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}(t)dt + v_o$$

不定積分は積分の一般形であって、積分範囲が明確でない場合にも使える。ただし、定数を微分すると0になることから、その逆である積分ではその定数が定まらない（上式のv_o）。これが**不定**と呼ぶ理由である。

１．３．加速度

ところで、時々刻々の速度がわかれば位置も正確に知ることができるのに、なぜ“加速度”というものが必要なのだろうか？

このページの主タイトルは“わかりやすい力学”である。しかし、これまで**“力”**に関する話は一度も出てこなかった。何故なら、力と密接に関係するのはこの加速度だからである。力と加速度の関係については次の章で詳細に説明するが、経験的な例として

- 脚力が強い人の方が一般に短距離走が速い
- 強力に加速する車のエンジンは大きい
- 車が壁に衝突するといっきに止まる（減速する）

等から、力と加速度が関係していることはイメージがつくだろう。

1．4．微小変化の意味

微分をはじめて習うとき、微分演算子として次の形を教えられる。

$$\frac{d}{dt} \quad \cdots (1.4-1)$$

これだと分子と分母を分割できるようには思えない。なのに、話がどんどん進んでいくと、積分のところあたりで「dtを両辺に掛けて」とか勝手に（1.4-1）式は割り算なんだ、と言われてしまう。そんなことをされたら当然混乱する。そこで**“微小変化”**というものの意味について掘り下げて考えててみよう。

例えばAさんが移動中、時刻tで位置$\boldsymbol{r}$を通過し、次の瞬間、つまり微小時間dt後、位置$\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$に移動したとする。このとき、Aさんは微小時間$dt$の間に微小変位$d\boldsymbol{r}$分移動したので、時刻$t$での速度は

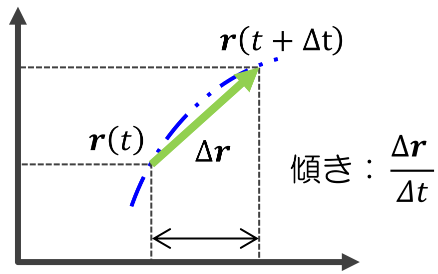
$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad \cdots (1.4-2)$$

となる。この場合速度$\boldsymbol{v}$は微小量$d\boldsymbol{r}$を微小量dtで割ったもの、つまり割り算と理解できる。ではこれが微分とそのまま結びつくのだろうか？

1．4．微小変化の意味

ここで微分の定義に立ち返ると、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \quad \cdots (1.4-3)$$



である。これは分母である位置の微小変化を微小時間で割って、さらにその微小時間を0に近づけよ、と言っているのであるから、そもそも微分には割り算の意味が含まれている。従って微分は微分演算子によって説明されるよりも、「微小変化を微小時間でわったもの」としてはっきり説明してもらった方が、その意味を理解しやすい。そうすれば「両辺にdtを掛けて」と言われてもしっくりくる。

$$\boldsymbol{v}dt = d\boldsymbol{r} \quad \cdots (1.4-3)$$

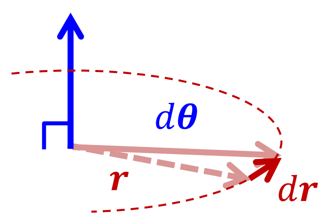
１．４．微小変化の意味

ところで、もし変位$\boldsymbol{r}'$が微小でないとすると、

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}'}{dt}$$

とはならない。**微分**はあくまで**微小量同士の変化の割合**を求めるものである。微分は無限小の直線近似であるため、微小でない量を微小時間で割ることは近似精度の問題から見ても成り立たない。そもそも微小時間はdtを極力0に近づけたもの**“無限小の時間”**での変化であるから、変化そのものも微小であるはずである（ここは無条件に受け入れるところであろう）。

例えば、回転運動のところで出てくる“無限小の回転”では、微小変化量と変化しない物理量の二つが含まれる。



$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r} \quad \cdots (1.4-4)$$

ここから速度$\boldsymbol{v}$を求めるとき両辺をdtで割ることになるのだが、上記の内容に従えば、dtは$d\boldsymbol{\theta}$のみに掛かることになる。

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \boldsymbol{r} \quad \cdots (1.4-5)$$