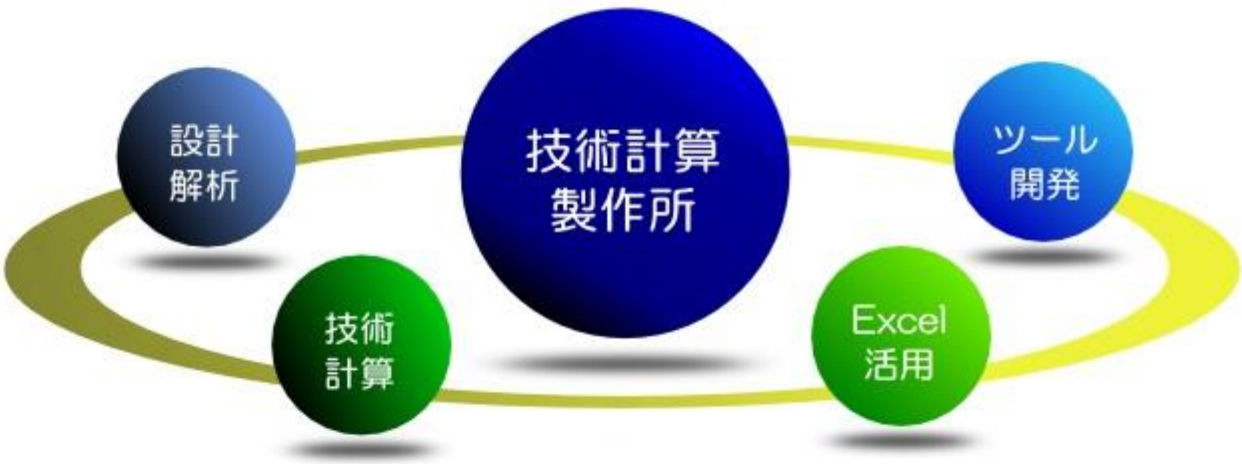
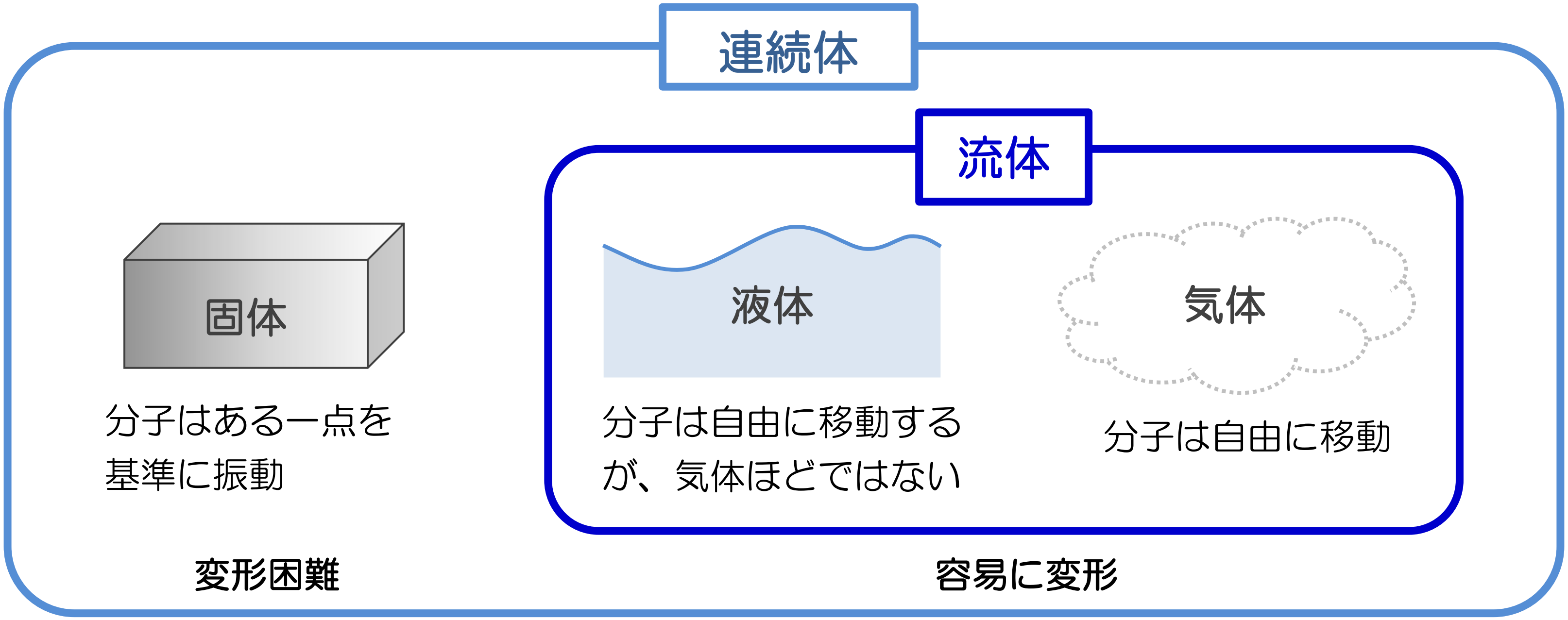
# CFDの解法選択




技術計算製作所

http://gijyutsu-keisan.com/

# ●流体とは？



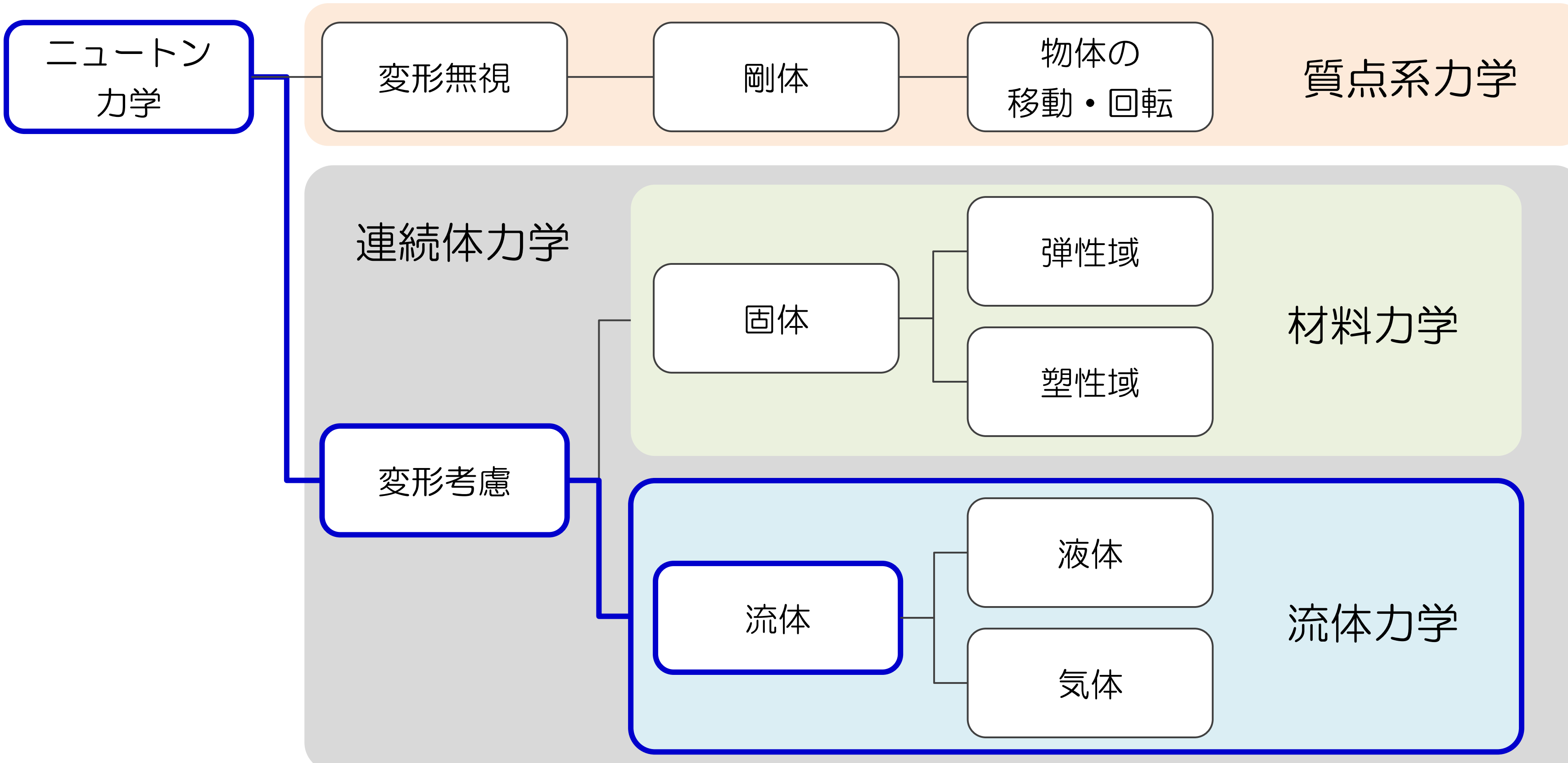

せん断応力に対して、

固体は変形してつりあう ⇔ 静止流体は変形しない
流体は流れ続ける（変形し続ける）

流体を“質点”として捉らえるのは非常に困難

**流体の運動は、移動と変形を伴うので複雑！！**

# ●流体力学




- 流体といえど、ニュートン力学（運動の三法則）に従う
- 分子の平均自由行程よりはるかに大きなスケールを扱う（連続体近似）
- 変形＝状態変化を考慮するため、熱力学を考慮する

# ●レイノルズの輸送方程式

流体の基本方程式

質量保存(連続の式)：$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$

式変形によって、
ナビエストークス方程式
が得られる

運動量保存(運動方程式)：$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\mu \nabla v_i) - \nabla P + \boldsymbol{f}$

$(i = x, y, z)$

エネルギー保存：$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) - P(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + S$

($w$：エンタルピー)

物理スカラーを$\phi$としたとき、すべて同じ形で表せる

$\phi = 1$：質量保存、$\phi = \boldsymbol{v}$の成分：運動量保存、$\phi = w$：エネルギー保存

レイノルズの輸送方程式：$\underbrace{\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}}_{\text{非定常項}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \phi \boldsymbol{v})}_{\text{移流項}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)}_{\text{拡散項}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{生成項}}$

**流体の運動は、レイノルズの輸送方程式を解くことで明らかになる**

しかし．．．

# ●CFDとは？

流体の運動把握 = レイノルズの輸送方程式を解くには．．．

解析的には解けない → 数値計算なら解ける

**CFD（Computational Fluid Dynamics） = 数値流体力学**

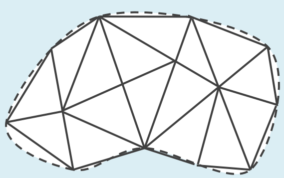
微分方程式をコンピュータで計算するには対象の**離散化（空間・時間）**が必要

デジタル化

## 空間の離散化

格子（Mesh）による分割

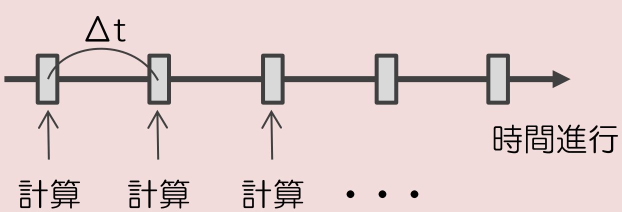
- 有限差分法
- **有限体積法** ⬅ これに限って話を進める
- 有限要素法



## 時間の離散化

サンプリング間隔Δtによる分割

- 陽解法
- 陰解法



# ●離散化したら？

レイノルズの輸送方程式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\phi\boldsymbol{v}) = \nabla\cdot(\Gamma\nabla\phi) + S_\phi$$

非定常項　移流項　拡散項　生成項

- 非定常項：時間に関して一階微分
- 移流項：空間に関して一階微分
- 拡散項：空間に関して二階微分
- 生成項：状況に応じて

例えば非定常項を離散化すると、$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \cong \frac{\rho_c\phi_c(t+\Delta t)-\phi_c(t)}{\Delta t}$

微分方程式は**近似的**に
単なる**代数方程式**（四則演算のみ）になる

課題も．．．

**時間進展のモデル化**
- 陰解法
- 陽解法

**近似精度**
- 一次精度
- 二次精度

**区分間の補間関数**
着目量、演算項、などによってさまざま

・・・

**“最適選択”がユーザーに課せられた難題！！**

# ●ユーザーに必要なこと

残念ながら、流体力学は完全な理論ではない

（そもそも完全な理論など存在しないが．．．）

↓

近似モデル、実験モデルなど工学的要素がたくさんある

↓

CFDには膨大な演算ロジック、物理モデルが組み込まれている

↓

**CFDの中身をすべて理解することは不可能！！**

↓

**ユーザーに必要なこと！！**

- （古典）力学、熱力学、流体力学の**つながり**を理解
- 微積分の**概念**を理解
- CFDの**概念**を理解
- 各機能の**要点と特徴**の把握
- 実践に勝るものなし
- 自らの手で実測データと比較

すべてを深く知る必要はない！！
いかに**要点を“理解する”**（“知る”ではない）かが重要

# ●空間の離散化法

（1）有限差分法（FDM：Finite Difference Method）

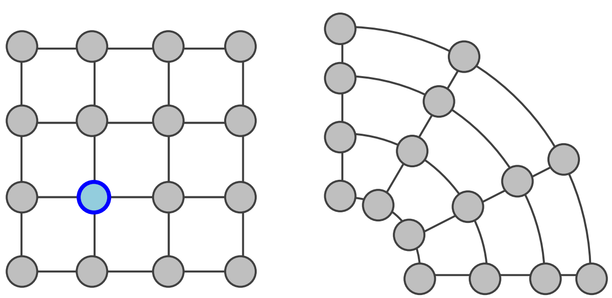
空間を整然と分割し、その格子点（ノード）上で演算を行う。形状追従性に難あり。

（2）有限体積法（FVM：Finite Volume Method）

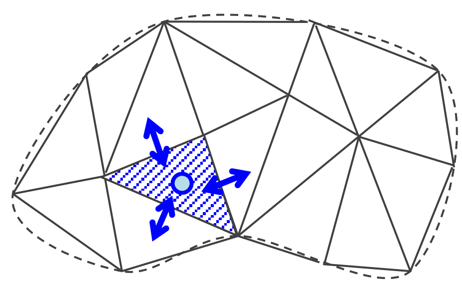
空間を体積格子（CV：Control Volume）で分割し、CV内の代表点で演算を行う。形状追従性良好。CFDで一般的に用いられる。

（3）有限要素法（FVM：Finite Element Method）

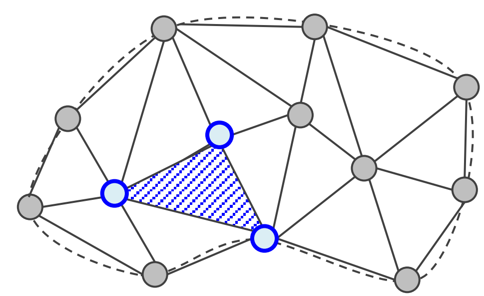
空間を形状に合わせて格子分割し、その格子点上で演算を行う。形状追従性良好。構造系CAEで一般的に用いられる。



（1）有限差分法



（2）有限体積法



（3）有限要素法

その他、粒子法、格子ボルツマン法、格子オートマトン法、境界要素法などさまざまある。

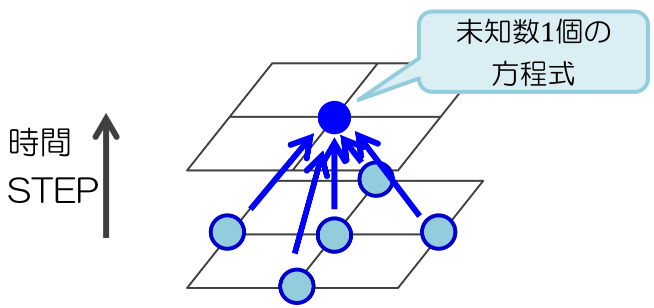
# ●時間の離散化法

（1）陽解法（Explicit Method）

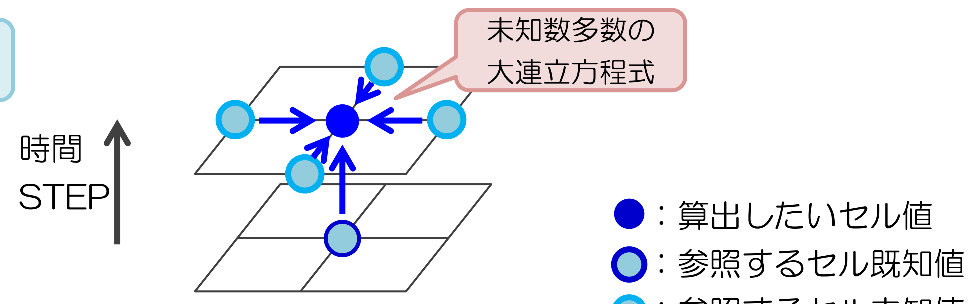
現時刻tの着目セルとその隣接セルの値をもとに、時刻t＋Δtの値を決める方法。

（2）陰解法（Implicit Method）

時刻t+Δtの着目セルとその隣接セル値（つまり、解の予測値）を仮定し、反復計算を行うことでセルの収束値を解とする方法。




（1）陽解法




（2）陰解法

| | 陰解法 | 陽解法 |
|---|---|---|
| 計算負荷 | 高 | 低 |
| 計算安定性 | 高 | 低 |
| サンプリング時間Δt | 大 | 小 |

（計算安定性に関する参考：
http://www.ocw.titech.ac.jp/index.php?module=General&action=DownLoad&file=20091224611067-0-8.pdf&JWC=20091224611067）

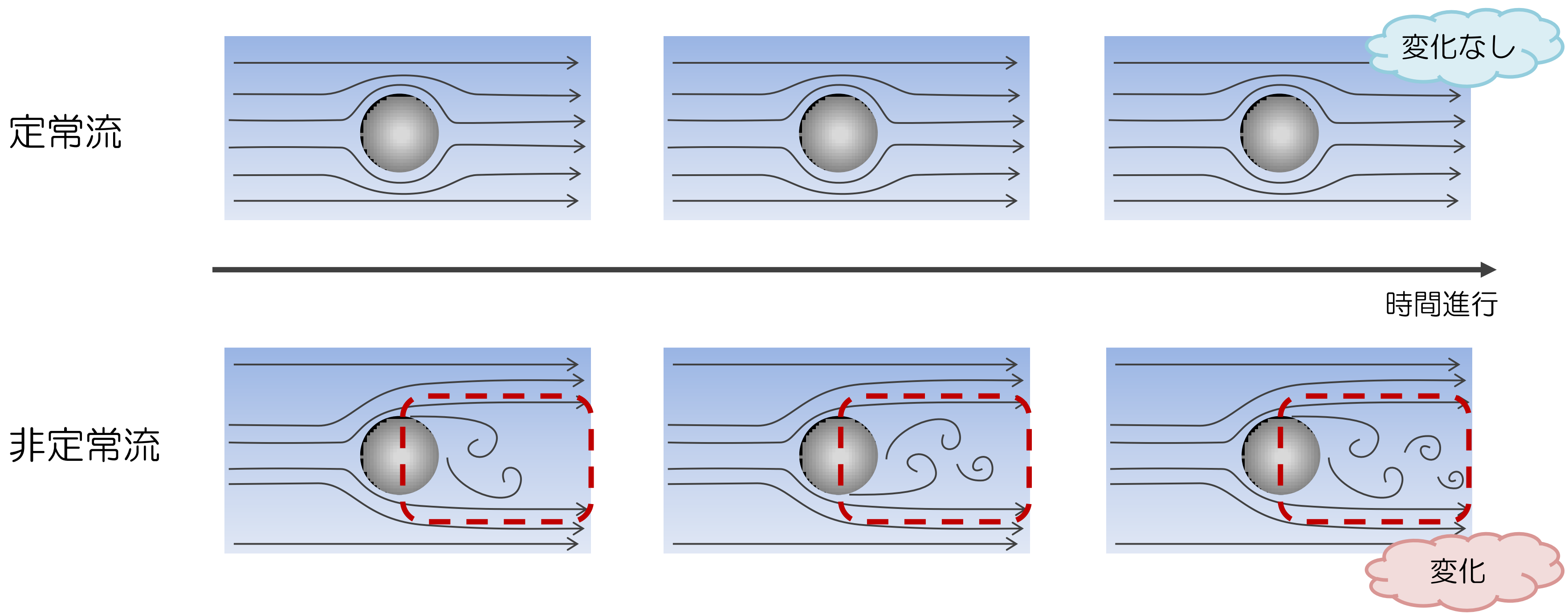
# ●定常流れと非定常流れ

（1）定常流れ

時間の進行に対し、流れが変化しないもの。あるいはその変化が十分に小さく無視できるような流れ。

（2）非定常流れ

時間の進行に対し、流れが変化するもの。主に、流れに乱れが発生する場合。



# ●流体の近似モデル

流体の特徴　⇒　「容易に変形 → 流れが発生」

物質全体の質量が保存される（連続の式）ことに着目すると

流体の密度変化が小さい場合

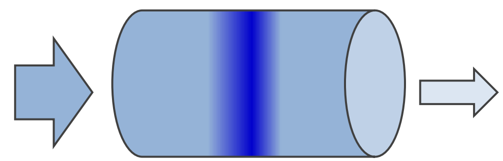
入る質量 ≒ 出る質量

**非圧縮性流体**

流体の密度変化が小さく、その影響が無視できる場合

- 気体の比較的低速な流れ
- 液体の流れ

流体の密度変化が大きい場合



入る質量 ＝ 残る質量 + 出る質量

**圧縮性流体**

流体の密度変化が流れに対して本質的な影響を持つ場合

- 気体の高速流れ
- 衝撃的な流れ

音と密接な関係
⇒ **音速との関係**が指標に

マッハ数：M = v / c

流体のモデル化は上記特徴を踏まえ選択

# ●流体の近似モデル

**圧縮性を考慮する条件の目安 ＝ 非圧縮性として扱える条件**

音速：$c^2 = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$　(等エントロピー変化を仮定)

非圧縮の場合、密度$\rho$一定ゆえ連続の式は　$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$　一次元として扱えば　$\rho \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$

さらに、密度変化dρ≒0であるため非圧縮性の条件：$\left|\dfrac{d\rho}{\rho}\right| \ll \left|\dfrac{dv}{v}\right|$

流体は断熱ゆえ理想流体近似でき、運動方程式は　$v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}$　$\leftrightarrow$　$dv = -\dfrac{dp}{\rho v} = -\dfrac{c^2}{v}\dfrac{d\rho}{\rho}$

非圧縮の条件に適用すれば$\left|\dfrac{v dv}{c^2}\right| \ll \left|\dfrac{dv}{v}\right|$

**非圧縮として扱える条件　：$\boldsymbol{M^2 = \dfrac{v^2}{c^2} \ll 1}$　($\boldsymbol{M}$：マッハ数)**

非圧縮性として扱える条件は、マッハ数0.3が一般的

＜参考＞

澱み密度$\rho_o$とするとき、$\dfrac{\rho}{\rho_o} \approx 1 - \dfrac{1}{2}(\gamma - 1)M^2$($\gamma$：比熱比)の関係から、$M = 0.3$のとき、$\rho$は$\rho_o$に対して5%程度の密度減少となる

技術計算製作所
http://gijyutsu-keisan.com/

# ●流体の解法（ソルバー）選択

音速：$c^2 = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$

### 非圧縮性流体

- 密度一定（dρ＝0）
  ⇒ **音速c = ∞**
- 音波（微小圧力波）による高速な状態変化伝播は無視
- dρ≒0と見なせる状態での流体内の密度変化は近似的に扱える

### 圧縮性流体

- 圧力変化にともない密度も変化（dρ≠0）
  ⇒ **音速c＜∞**
- v±cで伝播する圧力波、密度波を考慮
- 衝撃波、チョーク流れをモデル化

**圧力ベースソルバー**

速度場の求め方によって場合わけ

- 分離型
- 連成型

**密度ベースソルバー**

速度場の求め方

- 連成型

※大雑把な分類であり、状況によっては圧縮性でも圧力ベースソルバーを使う場合あり

# ●圧力ベースソルバー

流体の基本方程式

質量保存(連続の式)　：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$

運動量保存(運動方程式)：$\dfrac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\mu \nabla v_i) - \nabla P + \boldsymbol{f}$

$(i = x, y, z)$

非圧縮性の場合、<u>密度 $\rho$ は一定かつ既知</u>

流速vの決定は、圧力Pが支配的

しかしながら、上記計算式は圧力と流束のつり合い条件を定めるもの

つまり、**圧力、流速とも未知**

流速vと圧力Pを決定する演算アルゴリズムには様々な工夫がある

- **分離型解法**：運動方程式と連続の式を独立に扱う
- **連成型解法**：運動方程式と連続の式を連成させて扱う

※圧力ベースソルバーは、状態方程式を考慮することで、密度変化の微小な圧縮性流体にも適用可能

# ●密度ベースソルバー

流体の基本方程式

質量保存(連続の式)：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$

運動量保存(運動方程式)：$\dfrac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\mu \nabla v_i) - \nabla P + \boldsymbol{f}$
$(i = x, y, z)$

エネルギー保存：$\dfrac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) - P(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + S$
$(w$：エンタルピー$)$

状態方程式：$f(\rho, p, T) = 0$　($f$は3つの状態量を結ぶ関数)

圧縮性の場合、<u>密度$\rho$は変数</u>

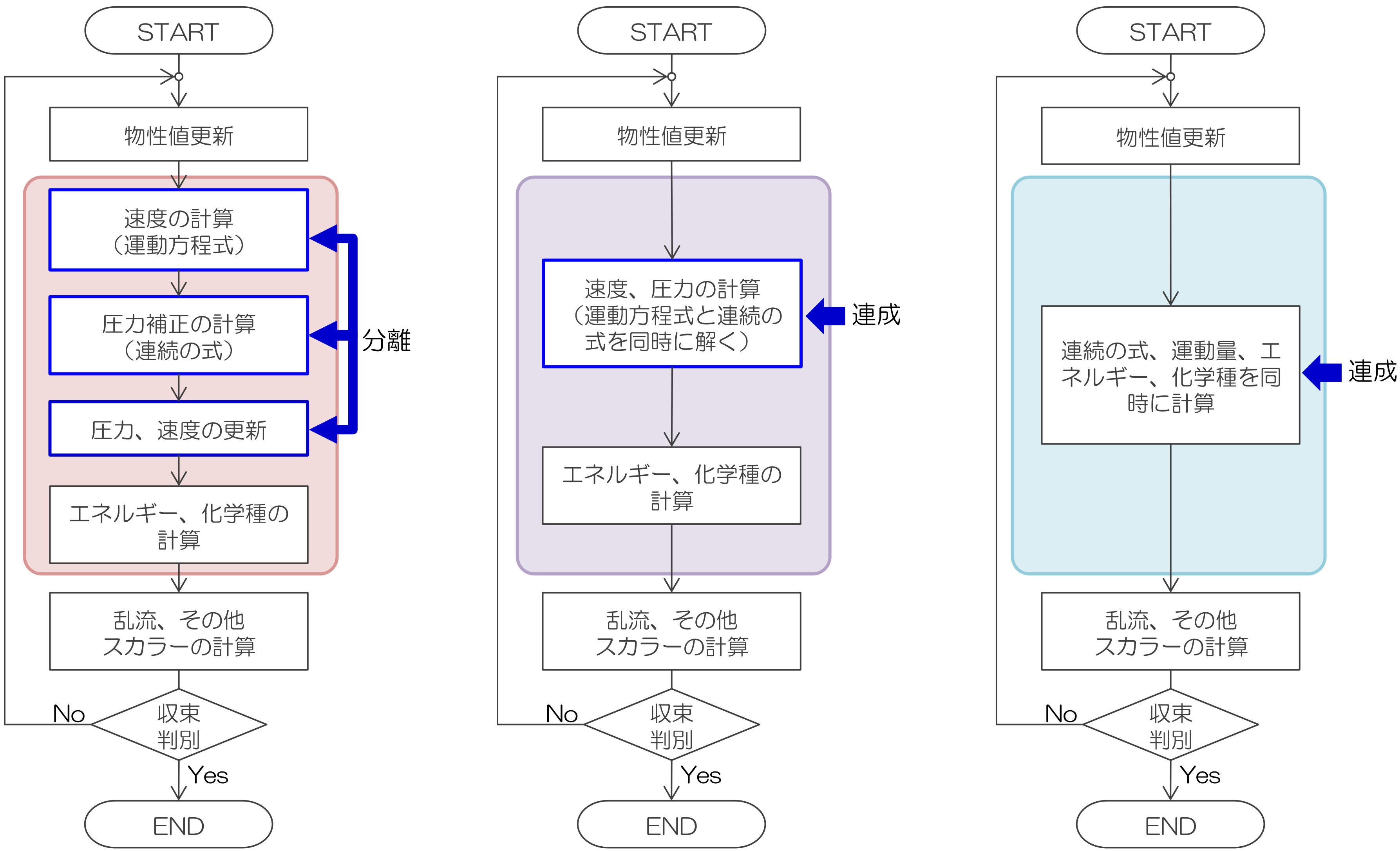
**未知数は流速（3成分）と状態量3つ**

未知数は多数あり独立には扱えない

→ <u>連成して解くより他ない</u>

# ●ソルバー計算フロー

（1）圧力ベース**分離型**ソルバー　（2）圧力ベース**連成型**ソルバー　（3）**密度**ベースソルバー（連成型）



# ●圧力ベース分離型ソルバー

概念：圧力を既知と考え、運動方程式から速度予測値を計算した後、連続の式を満足するために圧力補正、速度補正を行い、収束解が得られるまで繰り返す方法。

解となる速度v、圧力pを予測値$v_{pred}$、$p_{pred}$と補正値$v_{corr}$、$p_{corr}$の合計として扱い、補正値が0となるとき、真の解とする。

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_{pred}} + \boldsymbol{v_{corr}} \\ p = p_{pred} + p_{corr} \end{cases} \xrightarrow{\text{繰り返し}} \begin{cases} \boldsymbol{v} \fallingdotseq \boldsymbol{v_{pred}} \\ p \fallingdotseq p_{pred} \end{cases}$$

圧力と速度の計算を行うアルゴリズムは主に以下の4つ

圧力-速度連成（カップリング）

圧力ベース分離型
- SIMPLE：Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation
- SIMPLE C：SIMPLE Consistent
- SIMPLE R：SIMPLE Revise
- PISO：Pressure-Implicit with Splitting of Operators

# ●圧力ベース分離型ソルバーの選択

４つの圧力-速度カップリングは、計算機の能力（メモリ、CPU）、計算精度を考慮し選択。

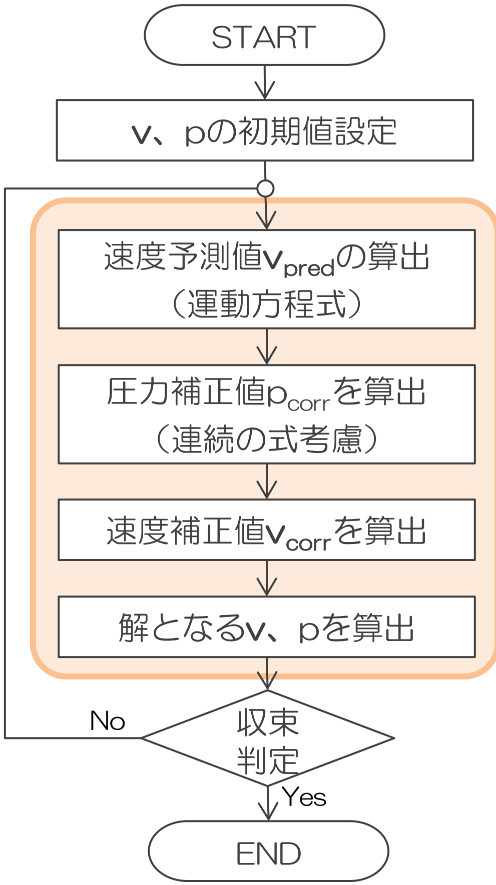
| | SIMPLE | SIMPLE R | SIMPLE C | PISO |
|---|---|---|---|---|
| 特徴 | 定常流の基準手法 | SIMPLEの収束性改善 | ←に同じ | 非定常流の基準手法 |
| 計算負荷 | 低 | やや高 | やや高 | 高 |
| 計算速度 | 遅 | やや速 | やや速 | 速 |
| 計算精度 | △ | ○ | ○ | ○～◎ |
| 定常/非定常 | 両方対応 | 両方対応 | 両方対応 | 両方対応 |
| 圧力不足緩和 | 必要 | 不要 | 不要 | 必要 |

※1：SIMPLE RとSIMPLE Cの優劣判断は難しい。あえていうなら、圧力場の正確性をを求めるならSIMPLE R、Meshひずみの耐性ならSIMPLE Cか？

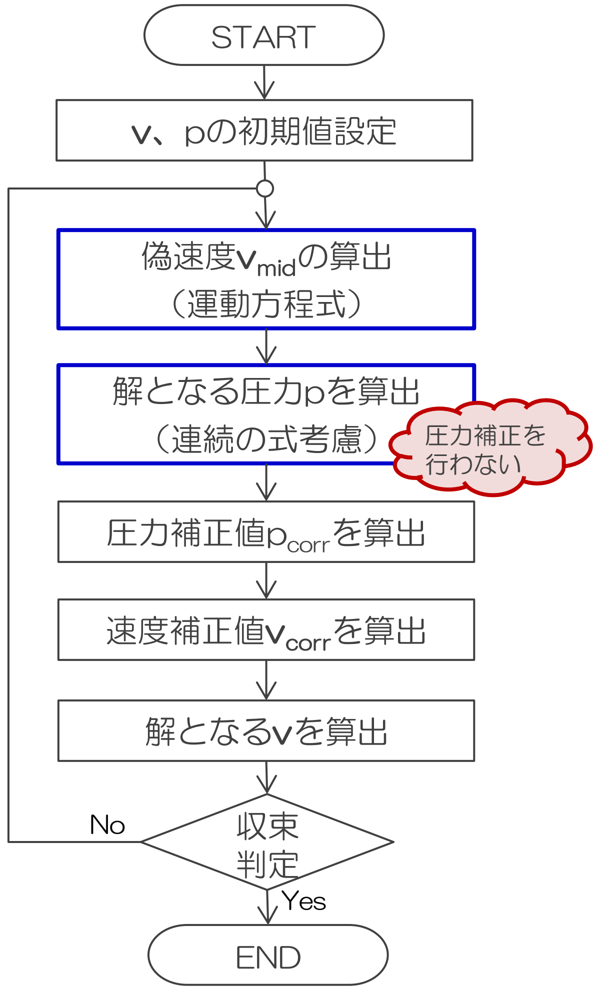
※2：不足緩和の設定はセッティングによるものであり、理論的に得られるものではない

# ●圧力–速度カップリング・アルゴリズムのフロー

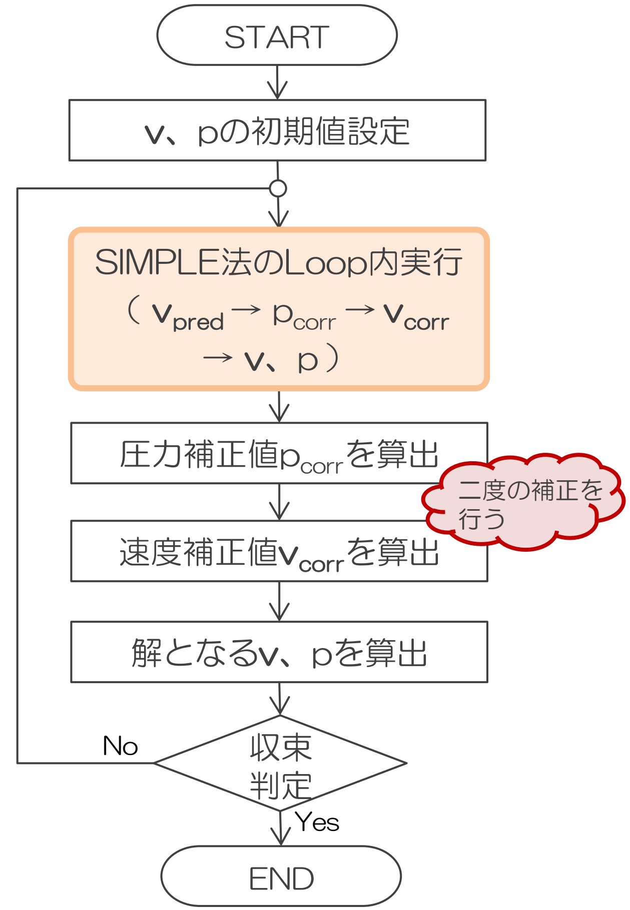
## （1）SIMPLE /SIMPLE C




## （2）SIMPLE R




## （3）PISO



# ●圧力-速度カップリング・アルゴリズムの概要

## （1）SIMPLE法

速度補正計算で隣接セルの速度補正項をカットする近似が行われるため、**圧力補正を過大評価**。圧力、速度に対して**不足緩和**※を用いて発散を抑制（一般に圧力 = 0.3、速度 = 0.7。状況に応じて変更）。

## （2）SIMPLE C法

SIMPLE法でカットした演算項を近似計算することで、SIMPLE法の**収束性向上**と**圧力に対する不足緩和を不要**とすることが目的（速度の不足緩和は必要）。

## （3）SIMPLE R法

解となる圧力を速度から直接解き、圧力補正は速度補正のみに使用することで**圧力の計算精度を向上**させ、 SIMPLE法の**収束性向上**と**圧力に対する不足緩和を不要**とすることが目的（速度の不足緩和は必要）。

## （4）PISO法

もともとは、**非定常の圧縮性流れ問題を反復計算なしで計算**するための手法だが、定常流れの反復計算にも適用。SIMPLE法の収束性向上を狙った手法。**圧力、速度に対する不足緩和が必要**。

※：不足緩和の設定はセッティングによるものであり、理論的に得られるものではない

# ●参考文献


1. 「数値流体力学第2版」森北出版株式会社：H.K.Versteeg, W.Malalasekera（著）, 松下 洋介 その他（翻訳）
2. 名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻流体力学研究室テキスト「圧縮性流体力学」：中村佳朗:：
   http://fluid.nuae.nagoya-u.ac.jp/lecture/comp/comp13.pdf
3. 中部CAE懇話会 基礎講座 第７回（H21年度） 流体伝熱基礎講座テキスト「流体数値計算法」：森西洋平：
   http://fluid.web.nitech.ac.jp/Gotoh_Home_page/Edu/Public_course/Text/CAE_4th.pdf