

4. 高速フーリエ変換（FFT）

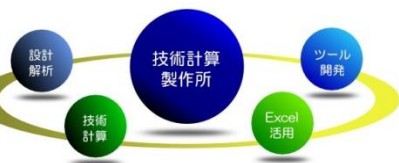
4. 1. FFTで利用する性質

4. 2. FFTの実行ロジック

4. 2. 1. $N = 4$ の場合

4. 2. 2. $N = 8$ の場合

4. 2. 3. 一般化



4. 高速フーリエ変換（FFT）

高速フーリエ変換 =FFT : Fast Fourier Transform

計算機を用いて、**高速**で**離散フーリエ変換**（DFT : Descrete Fourier Transform）を実行

計算機が扱う
データの性質を利用

フーリエ係数を算定

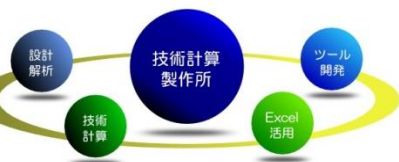
<メリット>

- DFTに対し高速で処理完了
- DFTに対し高精度

<デメリット>

- 扱えるデータ点数に制約 = （2のべき乗）個※

※：制約を変更することは可能だが、ここでは述べない



技術計算製作所

<http://giyutsu-keisan.com/>

4. 1. FFTで利用する性質

複素フーリエ係数を $c'_k = Nc_k = \sum_{p=0}^{N-1} f_p w_{kp}$ ($\because w_{kp} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kp}$) で表す



成分表示すると

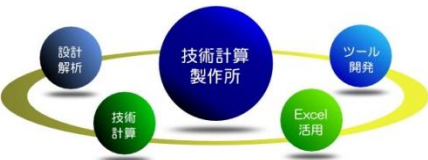
$$c'_k = f_0 w_0 + f_1 w_{1p} + f_2 w_{2p} + \cdots + f_{(N-1)} w_{k(N-1)}$$

指数関数部の周期性について、 k は整数ゆえ

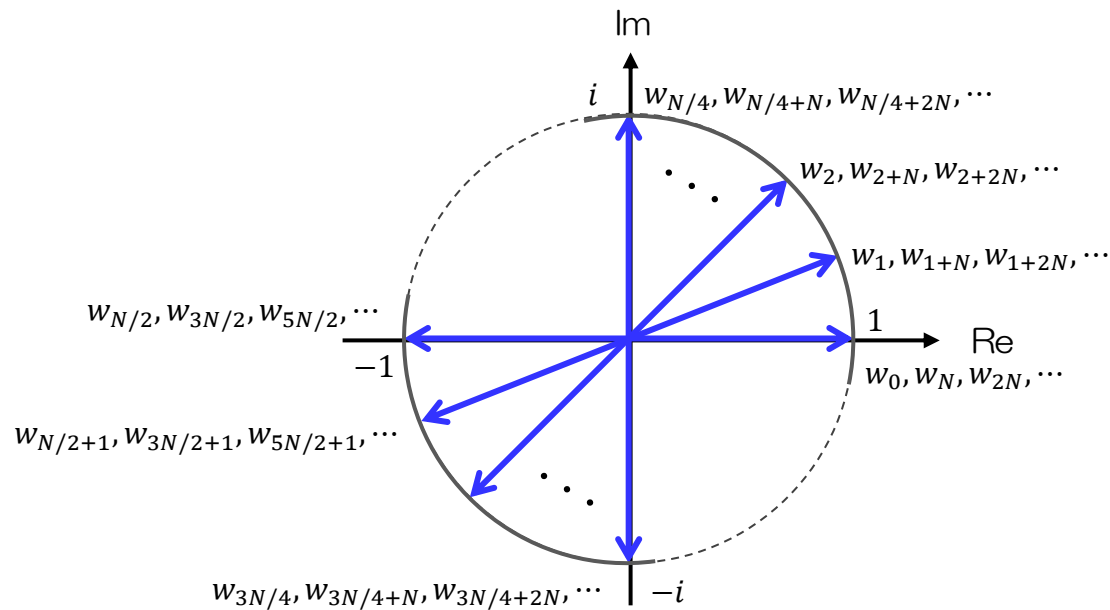
$$e^{-i\frac{2\pi}{N}k(p+N)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kp} e^{-i\frac{2\pi}{N}kN} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kp} \Rightarrow \because w_{kp} = w_{k(p+N)} = w_{kp \bmod N}$$

$N = 2^j$ (2のべき乗) ならば $w_k = -w_{k+N/2}$ ($j \geq 2$)

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}(k+N/2)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k} e^{-i\pi} = -e^{-i\frac{2\pi}{N}k} \Rightarrow w_k = -w_{k+N/2} (j \geq 2)$$

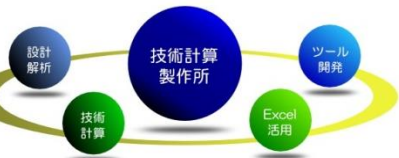


4. 1. FFTで利用する性質



$w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$ はフーリエ係数の線形結合に対する**基底**となる

$$c'_k = \sum_{p=0}^{N-1} f_p w_{kp \bmod N}$$

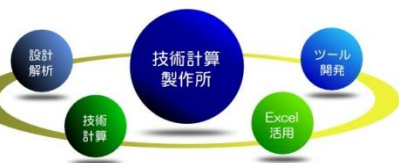


4. 2. FFTの実行ロジック

N=4の場合 } の具体例を見て → FFTの実行ロジック一般化
N=8の場合 }

<着眼点>

- データの並べ方
- 計算実行の類似性



4. 2. 1. FFTの実行ロジック (N = 4の場合)

$$c'_0 = \sum_{p=0}^3 f_p w_{0p} = f_0 w_0 + f_1 w_0 + f_2 w_0 + f_3 w_0$$

$$c'_1 = \sum_{p=0}^3 f_p w_{1p} = f_0 w_0 + f_1 w_1 + f_2 w_2 + f_3 w_3$$

$$c'_2 = \sum_{p=0}^3 f_p w_{2p} = f_0 w_0 + f_1 w_2 + f_2 w_4 + f_3 w_6$$

$$c'_3 = \sum_{p=0}^3 f_p w_{3p} = f_0 w_0 + f_1 w_3 + f_2 w_6 + f_3 w_9$$

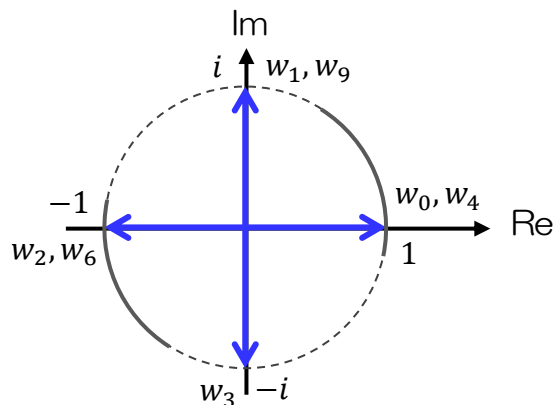
行列表現



$$\begin{bmatrix} c'_0 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 \\ w_0 & w_3 & w_6 & w_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

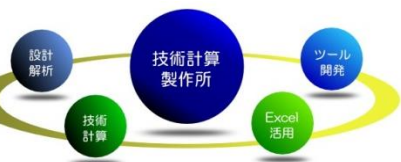
$$= \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0 & w_2 & w_0 & w_2 \\ w_0 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

($\because w_{kp} = w_{kp \bmod 4}$)



各フーリエ係数は、次の重ね合わせで表せる

$$c'_k = f_{**} w_0 + f_{**} w_1 + f_{**} w_2 + f_{**} w_3$$



技術計算製作所

<http://gijyutsu-keisan.com/>

4. 2. 1. FFTの実行ロジック (N = 4の場合)

行列を入れ替えて偶数番と奇数番をまとめる

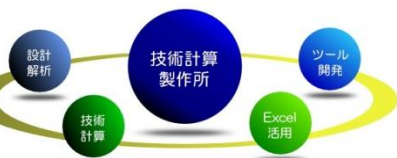
$$\begin{bmatrix} c'_0 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0 & w_2 & w_0 & w_2 \\ w_0 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_2 & w_1 & w_3 \\ w_0 & w_0 & w_2 & w_2 \\ w_0 & w_2 & w_3 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 \\ w_0 & w_2 & w_1 w_0 & w_1 w_2 \\ w_0 & w_0 & w_2 w_0 & w_2 w_0 \\ w_0 & w_2 & w_3 w_0 & w_3 w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w_1 \\ 1 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & 0 & 0 \\ w_0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & w_0 \\ 0 & 0 & w_0 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w_1 \\ 1 & 0 & -w_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\because \begin{matrix} w_0 = 1, w_2 = -1 \\ w_2 = -w_0, w_3 = -w_1 \end{matrix} \right)$$

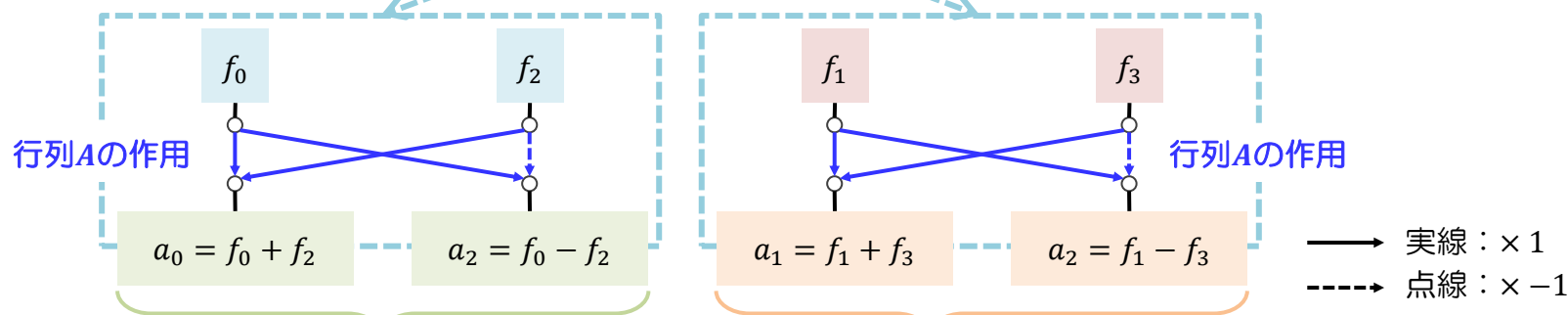


4. 2. 1. FFTの実行ロジック (N = 4の場合)

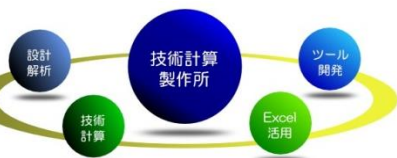
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix}, \quad f_{od0} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad f_{ev1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad E: \text{単位行列} \quad \text{と} \text{お} \text{い} \text{て}$$

$$c' = \begin{bmatrix} E & C_0 \\ E & -C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{od0} \\ f_{ev1} \end{bmatrix}$$

水色枠部を図式化



$$\begin{bmatrix} c'_0 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w_1 \\ 1 & 0 & -w_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \\ f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & C_0 \\ E & -C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A f_{od0} \\ A f_{ev1} \end{bmatrix}$$



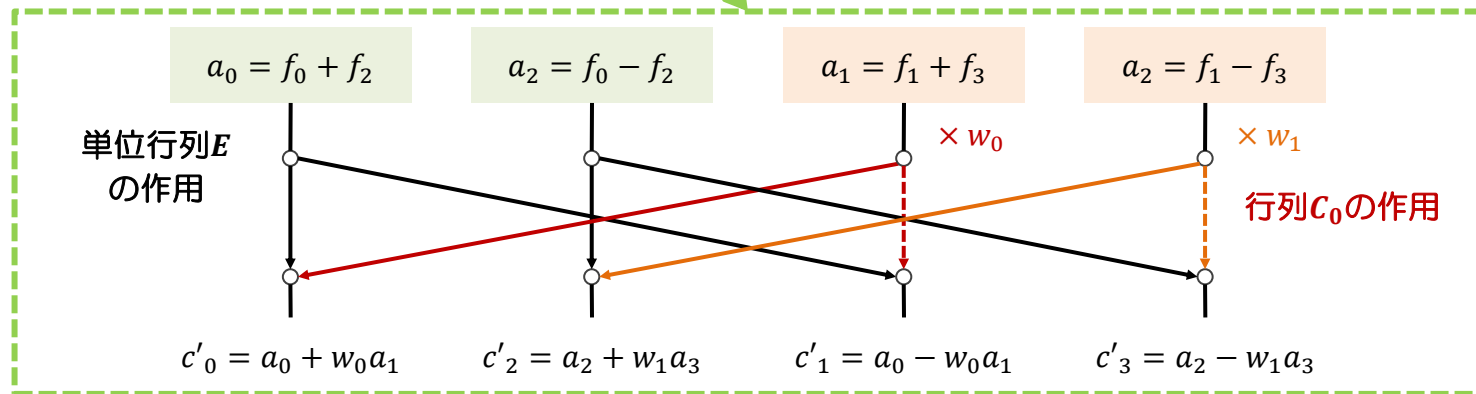
技術計算製作所

<http://giyutsu-keisan.com/>

4. 2. 1. FFTの実行ロジック (N = 4の場合)

$$c' = \begin{bmatrix} E & C_0 \\ E & -C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Af_{od0} \\ Af_{ev1} \end{bmatrix} \quad \text{ただし、} Af_{od0} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad Af_{ev1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

緑色枠部を図式化すると

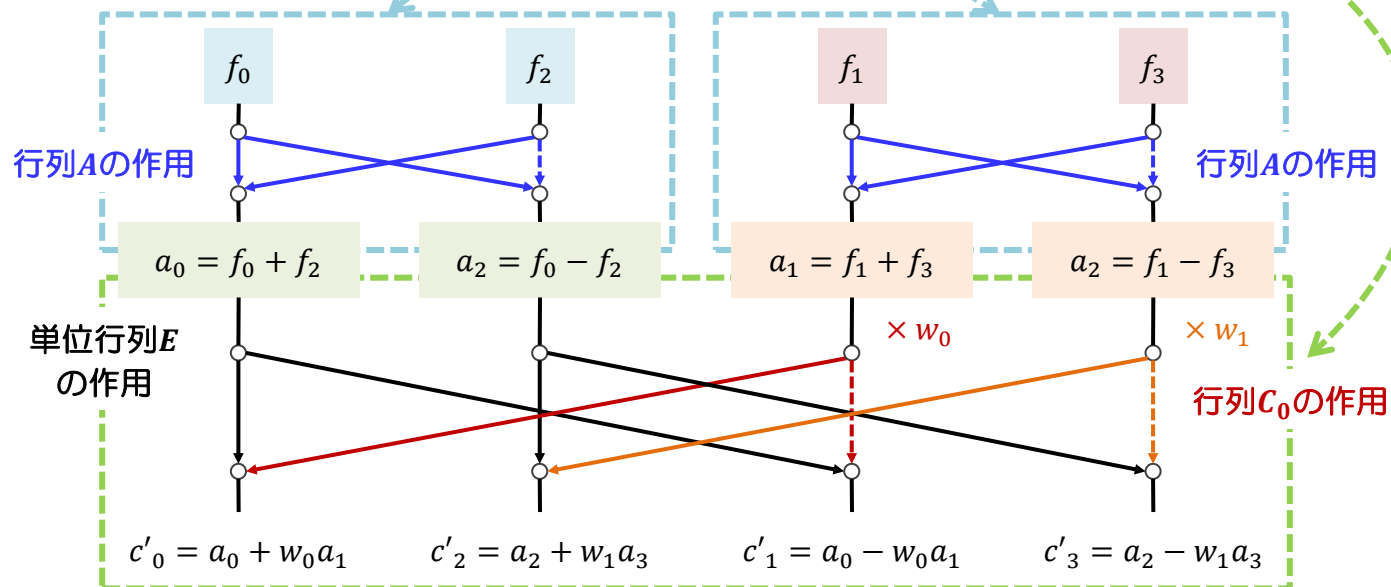


以上をまとめると...

4. 2. 1. FFTの実行ロジック (N = 4の場合)

$$c' = \begin{bmatrix} E & C_0 \\ E & -C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{od0} \\ f_{ev1} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix}$$

バタフライ演算



4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

$$c'_0 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{0p} = f_0 w_0 + f_0 w_0 + f_0 w_0 + \cdots + f_0 w_0$$

$$c'_1 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{1p} = f_0 w_0 + f_1 w_1 + f_2 w_2 + \cdots + f_7 w_7$$

$$c'_2 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{2p} = f_0 w_0 + f_1 w_2 + f_2 w_4 + \cdots + f_7 w_{14}$$

$$c'_3 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{3p} = f_0 w_0 + f_1 w_3 + f_2 w_6 + \cdots + f_7 w_{21}$$

$$c'_4 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{4p} = f_0 w_0 + f_1 w_4 + f_2 w_8 + \cdots + f_7 w_{28}$$

$$c'_5 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{5p} = f_0 w_0 + f_1 w_5 + f_2 w_{10} + \cdots + f_7 w_{35}$$

$$c'_6 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{6p} = f_0 w_0 + f_1 w_6 + f_2 w_{12} + \cdots + f_7 w_{42}$$

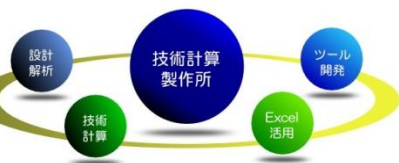
$$c'_7 = \sum_{p=0}^7 f_p w_{7p} = f_0 w_0 + f_1 w_7 + f_2 w_{14} + \cdots + f_7 w_{49}$$

行列表現



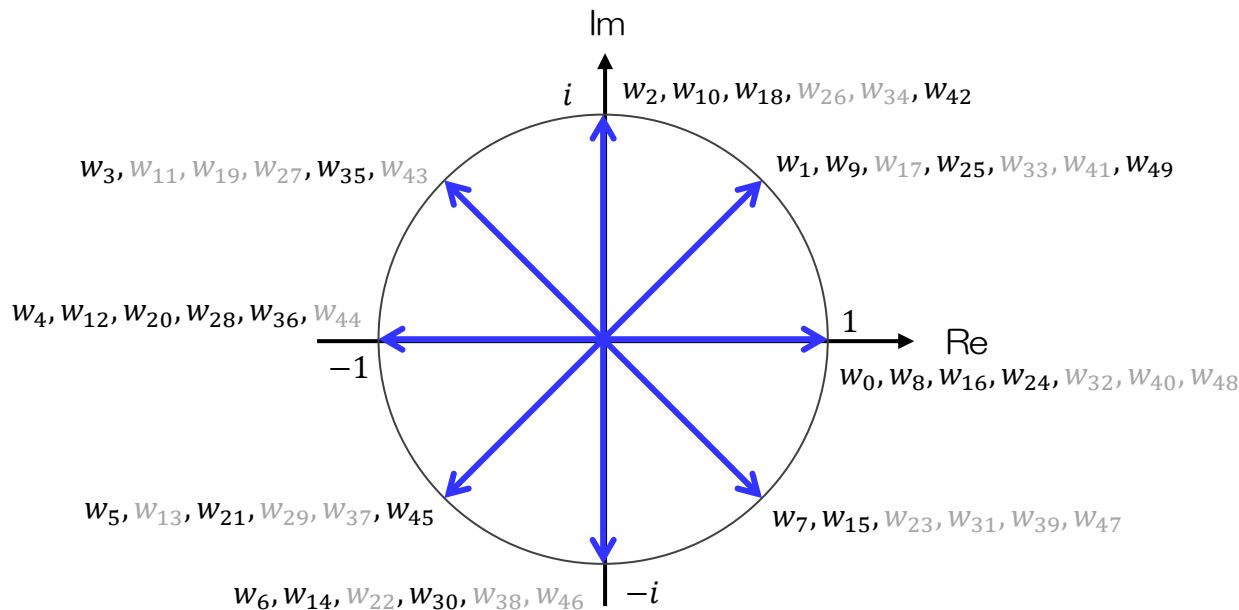
$$\begin{bmatrix} c'_0 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ c'_4 \\ c'_5 \\ c'_6 \\ c'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 & w_8 & w_{10} & w_{12} & w_{14} \\ w_0 & w_3 & w_6 & w_9 & w_{12} & w_{15} & w_{18} & w_{21} \\ w_0 & w_4 & w_8 & w_{12} & w_{16} & w_{20} & w_{24} & w_{28} \\ w_0 & w_5 & w_{10} & w_{15} & w_{20} & w_{25} & w_{30} & w_{35} \\ w_0 & w_6 & w_{12} & w_{18} & w_{24} & w_{30} & w_{36} & w_{42} \\ w_0 & w_7 & w_{14} & w_{21} & w_{28} & w_{35} & w_{42} & w_{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 & w_0 & w_2 & w_4 & w_6 \\ w_0 & w_3 & w_6 & w_1 & w_4 & w_7 & w_2 & w_5 \\ w_0 & w_4 & w_0 & w_4 & w_0 & w_4 & w_0 & w_4 \\ w_0 & w_5 & w_2 & w_7 & w_4 & w_1 & w_6 & w_3 \\ w_0 & w_6 & w_4 & w_2 & w_0 & w_6 & w_4 & w_2 \\ w_0 & w_7 & w_6 & w_5 & w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}$$



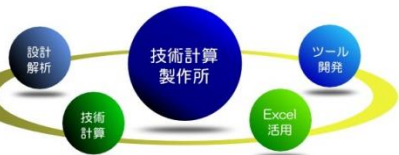
4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

N = 8の場合、基底は8個



各フーリエ係数は、次の重ね合わせで表せる

$$c'_k = f_{**}w_0 + f_{**}w_1 + f_{**}w_2 + f_{**}w_3 + f_{**}w_4 + f_{**}w_5 + f_{**}w_6 + f_{**}w_7$$

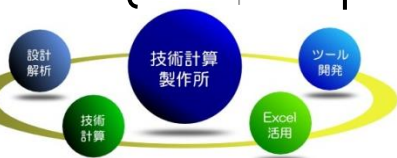


4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

行列を入れ替えて偶数番と奇数番をまとめる

$$\begin{bmatrix} c'_0 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ c'_4 \\ c'_5 \\ c'_6 \\ c'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 & w_1 & w_3 & w_5 & w_7 \\ w_0 & w_4 & w_0 & w_4 & w_2 & w_6 & w_2 & w_6 \\ w_0 & w_6 & w_4 & w_2 & w_3 & w_1 & w_7 & w_5 \\ w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_4 & w_4 & w_4 & w_4 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 & w_5 & w_7 & w_1 & w_3 \\ w_0 & w_4 & w_0 & w_4 & w_6 & w_2 & w_6 & w_2 \\ w_0 & w_6 & w_4 & w_2 & w_7 & w_5 & w_3 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 \\ w_0 & w_4 & w_2 & w_6 & w_1 w_0 & w_1 w_4 & w_1 w_2 & w_1 w_6 \\ w_0 & w_0 & w_4 & w_4 & w_2 w_0 & w_2 w_0 & w_2 w_4 & w_2 w_4 \\ w_0 & w_4 & w_6 & w_2 & w_3 w_0 & w_3 w_4 & w_3 w_6 & w_3 w_2 \\ w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 \\ w_0 & w_4 & w_2 & w_6 & w_5 w_0 & w_5 w_4 & w_5 w_2 & w_5 w_6 \\ w_0 & w_0 & w_4 & w_4 & w_6 w_0 & w_6 w_0 & w_6 w_4 & w_6 w_4 \\ w_0 & w_4 & w_6 & w_2 & w_7 w_0 & w_7 w_4 & w_7 w_6 & w_7 w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_4 & w_2 & w_6 & w_0 & w_4 & w_2 & w_6 \\ w_0 & w_0 & w_4 & w_4 & w_0 & w_0 & w_4 & w_4 \\ w_0 & w_4 & w_6 & w_2 & w_0 & w_4 & w_6 & w_2 \\ w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_4 & w_2 & w_6 & w_0 & w_4 & w_2 & w_6 \\ w_0 & w_0 & w_4 & w_4 & w_0 & w_0 & w_4 & w_4 \\ w_0 & w_4 & w_6 & w_2 & w_0 & w_4 & w_6 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

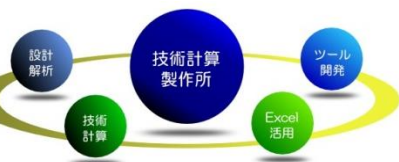


4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

w_0, w_1, w_2, w_3 だけを使って表すと $\left(\begin{array}{l} w_0 = 1, w_4 = -1 \\ w_k = -w_{k \bmod 4} \end{array} \right)$

$$\begin{pmatrix} c'_0 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ c'_4 \\ c'_5 \\ c'_6 \\ c'_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 & w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 \\ w_0 & w_4 & w_2 w_0 & w_2 w_4 & w_0 & w_4 & w_2 w_0 & w_2 w_4 \\ w_0 & w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 & w_0 & w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 \\ w_0 & w_4 & w_6 w_0 & w_6 w_4 & w_0 & w_4 & w_6 w_0 & w_6 w_4 \\ w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 & w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 \\ w_0 & w_4 & w_2 w_0 & w_2 w_4 & w_0 & w_4 & w_2 w_0 & w_2 w_4 \\ w_0 & w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 & w_0 & w_0 & w_4 w_0 & w_4 w_0 \\ w_0 & w_4 & w_6 w_0 & w_6 w_4 & w_0 & w_4 & w_6 w_0 & w_6 w_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_0 & w_0 & 1 & 0 & w_0 & w_0 \\ 0 & 1 & w_2 & w_2 & 0 & 1 & w_2 & w_2 \\ 1 & 0 & -w_0 & -w_0 & 1 & 0 & -w_0 & -w_0 \\ 0 & 1 & -w_2 & -w_2 & 0 & 1 & -w_2 & -w_2 \\ 1 & 0 & w_0 & w_0 & 1 & 0 & w_0 & w_0 \\ 0 & 1 & w_2 & w_2 & 0 & 1 & w_2 & w_2 \\ 1 & 0 & -w_0 & -w_0 & 1 & 0 & -w_0 & -w_0 \\ 0 & 1 & -w_2 & -w_2 & 0 & 1 & -w_2 & -w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

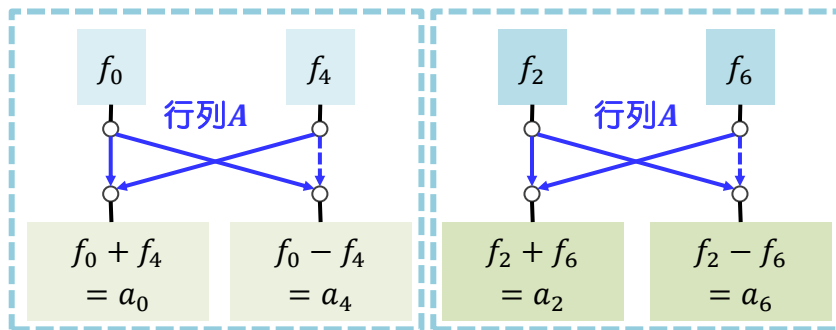


4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

小行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$, $C_k = \begin{bmatrix} w_k & 0 \\ 0 & w_{k+1} \end{bmatrix}$, $f_{od\ p} = \begin{bmatrix} f_p \\ f_{p+4} \end{bmatrix}$, $f_{ev\ q} = \begin{bmatrix} f_q \\ f_{q+4} \end{bmatrix}$ とおくと

$$c' = \begin{bmatrix} E & O & C_0 & O \\ O & E & O & C_2 \\ E & O & -C_0 & O \\ O & E & O & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B_0 & E & B_0 \\ E & -B_0 & E & -B_0 \\ E & B_0 & E & B_0 \\ E & -B_0 & E & -B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O & O & O \\ O & A & O & O \\ O & O & A & O \\ O & O & O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{od\ 0} \\ f_{od\ 2} \\ f_{ev\ 1} \\ f_{ev\ 3} \end{bmatrix}$$

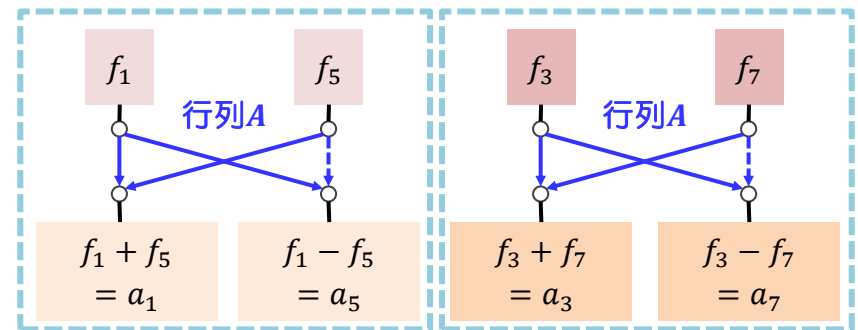
偶数部分



$$a_{od\ 0} = A f_{od\ 0} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{od\ 2} = A f_{od\ 2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

奇数部分

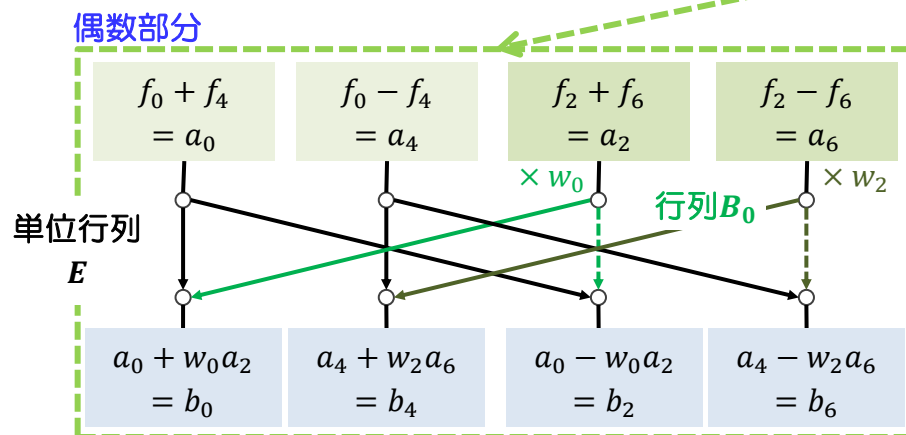


$$a_{ev\ 1} = A f_{ev\ 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

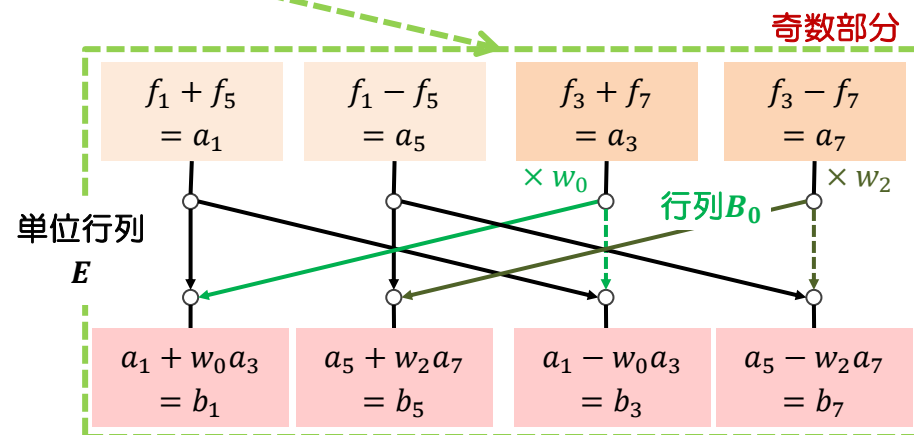
$$a_{ev\ 3} = A f_{ev\ 3} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_7 \end{bmatrix}$$

4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

$$c' = \begin{bmatrix} E & O & C_0 & O \\ O & E & O & C_2 \\ E & O & -C_0 & O \\ O & E & O & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B_0 & E & B_0 \\ E & -B_0 & E & -B_0 \\ E & B_0 & E & B_0 \\ E & -B_0 & E & -B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{od0} \\ a_{od2} \\ a_{ev1} \\ a_{ev3} \end{bmatrix}$$



$$b_{od0} = \begin{bmatrix} E a_{od0} + B_0 a_{od2} \\ E a_{od0} - B_0 a_{od2} \end{bmatrix}$$

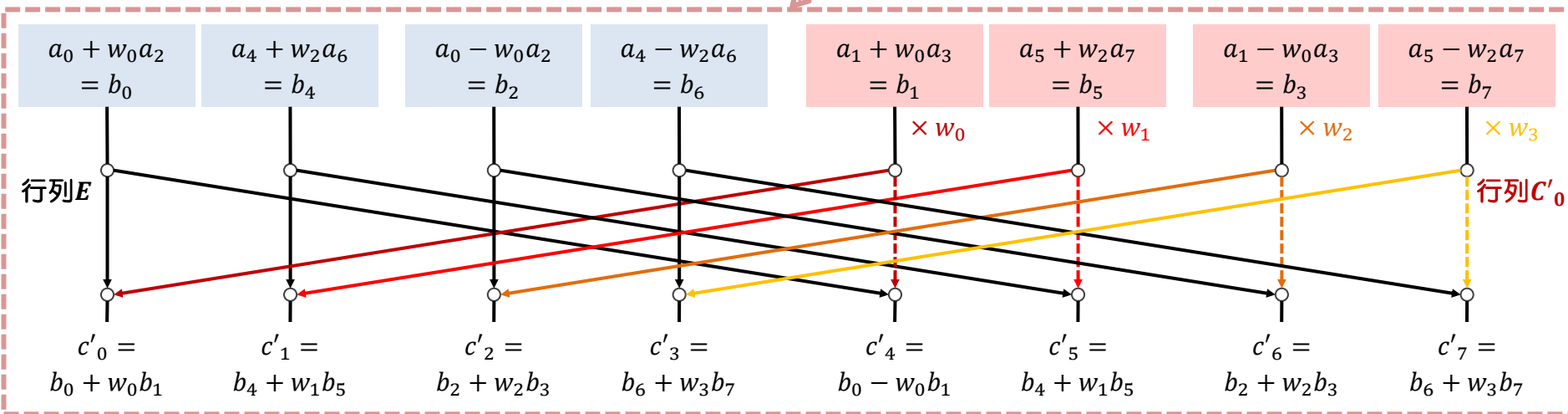


$$b_{ev1} = \begin{bmatrix} E a_{ev1} + B_0 a_{ev3} \\ E a_{ev1} - B_0 a_{ev3} \end{bmatrix}$$

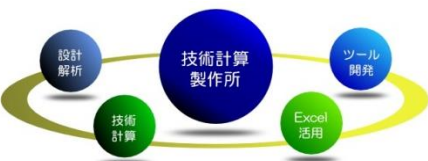
“偶数部分” と “奇数部分内” はそれぞれ4点FFTを実行しているのと同じ

4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

$$c' = \begin{pmatrix} E & 0 & C_0 & 0 \\ 0 & E & 0 & C_2 \\ E & 0 & -C_0 & 0 \\ 0 & E & 0 & -C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ea_{od0} + B_0a_{od2} \\ Ea_{od0} - B_0a_{od2} \\ Ea_{ev1} + B_0a_{ev3} \\ Ea_{ev0} - B_0a_{ev3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & C'_0 \\ E & -C'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{od0} \\ b_{ev1} \end{pmatrix}$$

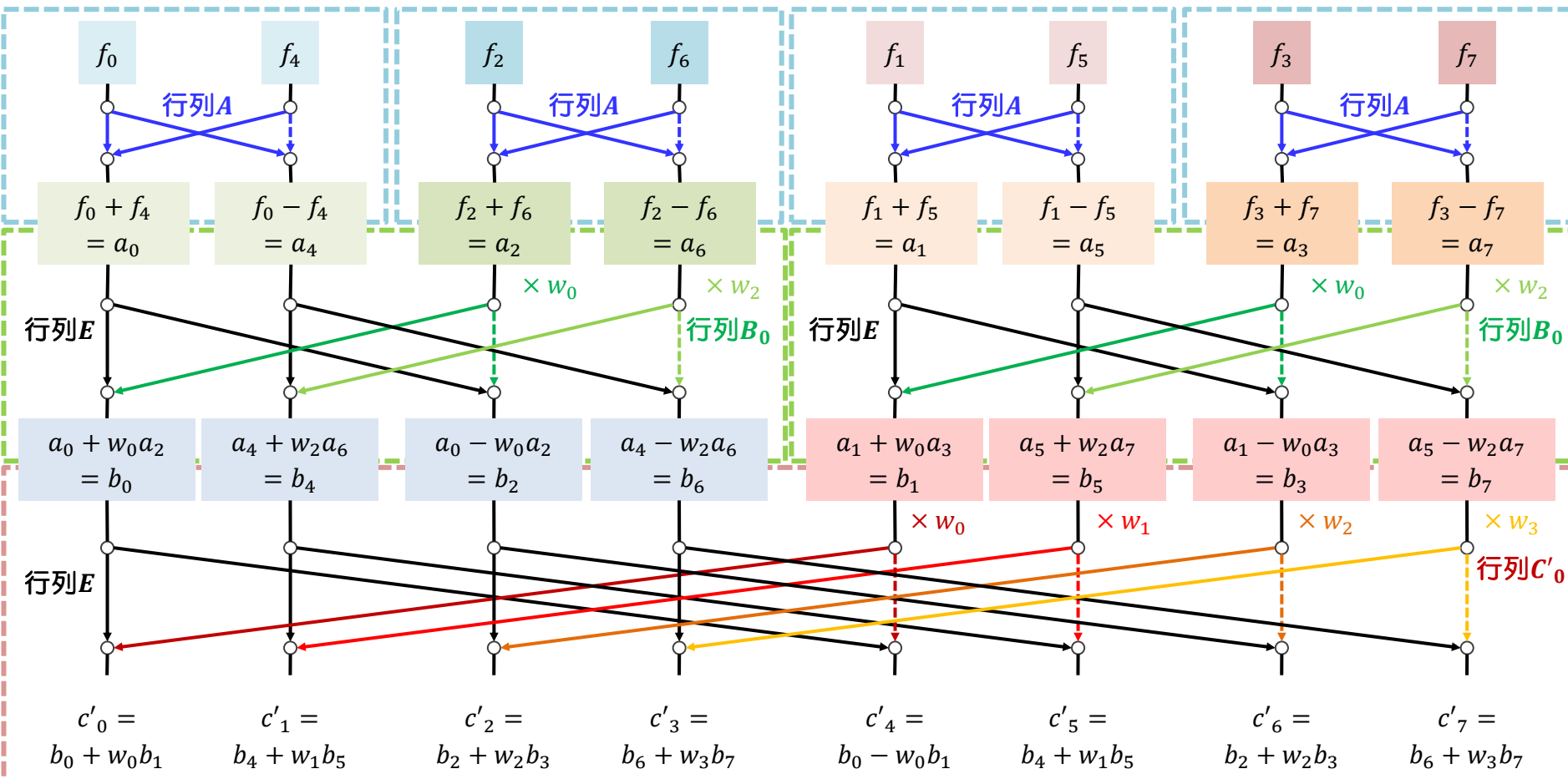


以上をまとめると. . .



4. 2. 2. FFTの実行ロジック (N = 8の場合)

バタフライ演算



4. 2. 3. FFTの実行ロジック（一般化）

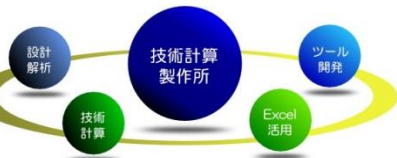
<Flow 1>

2^n 点データを並べ替える



<Flow 2>

データを区分けし、バタフライ演算を実行

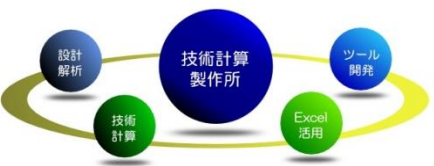


4. 2. 3. FFTの実行ロジック（一般化）

データの並べ替え（例： $N = 2^4$ の場合）

乗数：k ステップ		添数：0～ $2^4-1=15$															
0	1 とび	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2 とび	0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13	15
$k = 1$ を代入		$0 \sim 2^n - 2^k$								$2^{k-1} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-1})$							
2	4 とび	0	4	8	12	2	6	10	14	1	5	9	13	3	7	11	15
$k = 2$ を代入		$0 \sim 2^n - 2^k$				$2^{k-1} \sim 2^n - 2^{k-1}$				$2^{k-2} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-2})$				$2^{k-2} + 2^{k-1} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-2} - 2^{k-1})$			
3	8 とび	0	8	4	12	2	10	6	14	1	9	5	13	3	11	7	15
$k = 3$ を代入		$0 \sim 2^n - 2^k$		$2^{k-2} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-2})$		$2^{k-3} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-3})$		$2^{k-3} + 2^{k-2} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-3} - 2^{k-2})$		$2^{k-3} + 2^{k-1} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-3} - 2^{k-1})$		$2^{k-3} + 2^{k-2} + 2^{k-1} \sim 2^n - (2^k - 2^{k-3} - 2^{k-2} - 2^{k-1})$					

並べ替えには規則性が存在



4. 2. 3. FFTの実行ロジック（一般化）

データの並べ替え

2^n 個の数について、
10進数 → 2進数に変換



2進数の順番を鏡面对称化

ビットリバーサル



この方法により、
バタフライ演算に適した
データ並べ替えが可能

$N = 4$ の場合

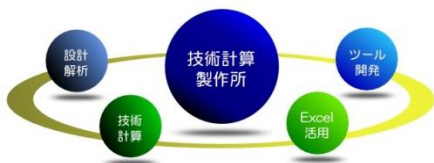
元の番号			ビットリバーサル	
10進数	2進数		10進数	2進数
0	00	⇔	0	00
1	01		2	10
2	10		1	01
3	11		3	11

$N = 16$ の場合

元の番号			ビットリバーサル	
10進数	2進数		10進数	2進数
0	0000	⇔	0	0000
1	0001		8	1000
2	0010		4	0100
3	0011		12	1100
4	0100		2	0010
5	0101		10	1010
6	0110		6	0110
7	0111		14	1110
8	1000		1	0001
9	1001		9	1001
10	1010		5	0101
11	1011		13	1101
12	1100		3	0011
13	1101		11	1011
14	1110		7	0111
15	1111		15	1111

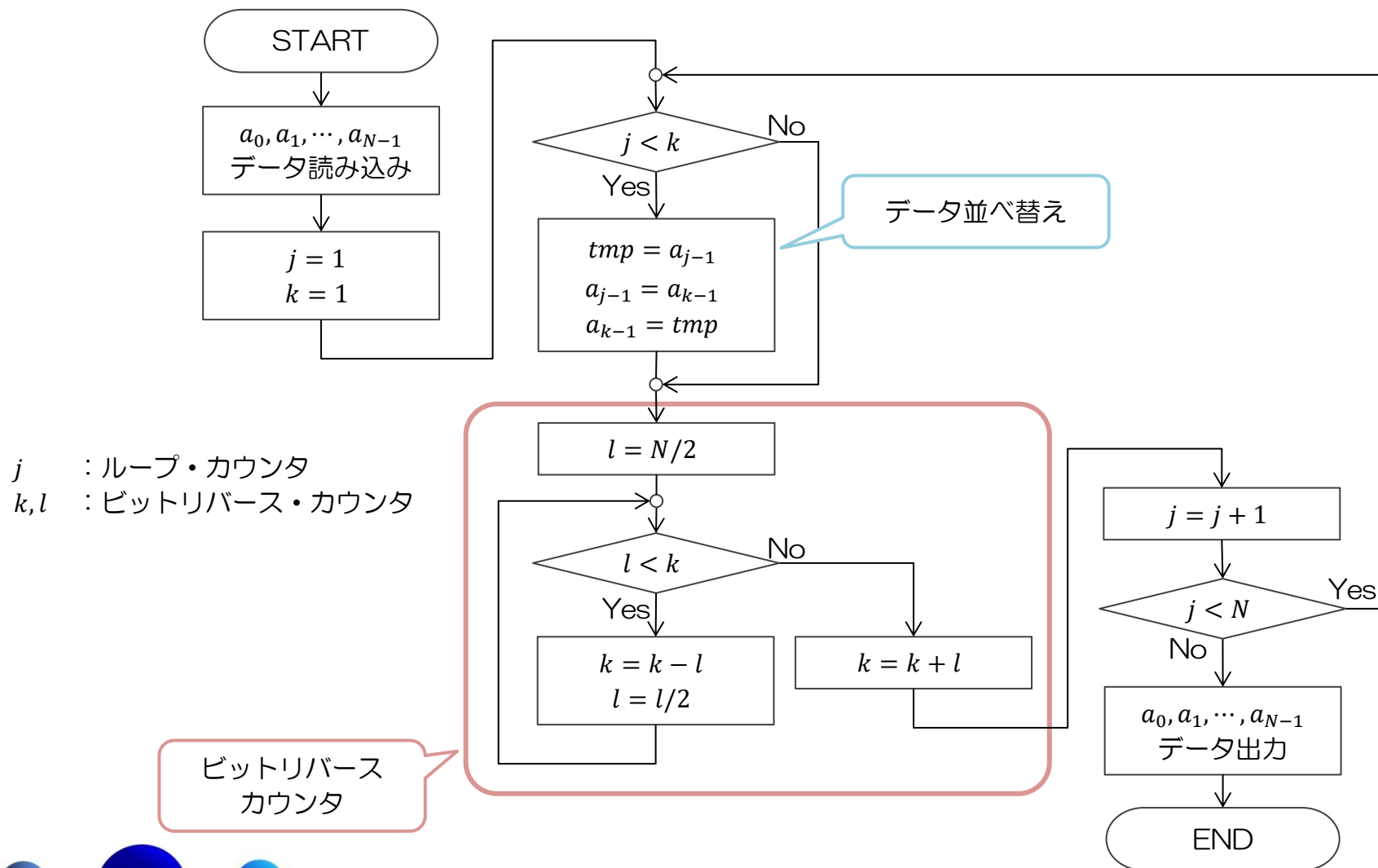
$N = 8$ の場合

元の番号			ビットリバーサル	
10進数	2進数		10進数	2進数
0	000	⇔	0	000
1	001		4	100
2	010		2	010
3	011		6	110
4	100		1	001
5	101		5	101
6	110		3	011
7	111		7	111

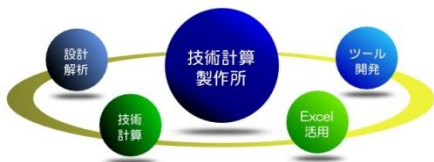


4. 2. 3. FFTの実行ロジック（一般化）

ビットリバーサル・フローチャート

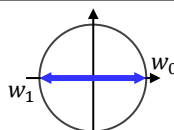
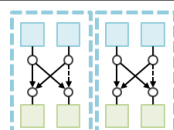
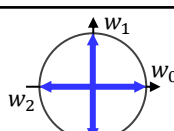
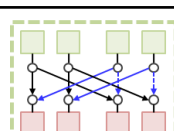
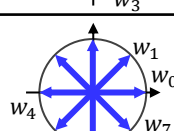
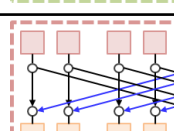
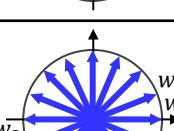
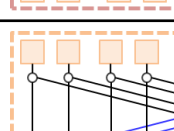


j : ループ・カウンタ
 k, l : ビットリバーサル・カウンタ



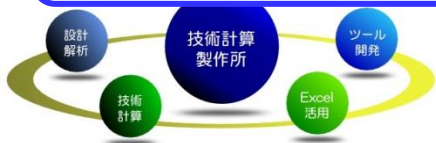
4. 2. 3. FFTの実行ロジック（一般化）

ビットリバーサルに基づき並べ替えた $N = 2^n$ 個のデータ $f_0, \dots, f_{N-1}$ に対し、バタフライ演算を下図の手順で行う。

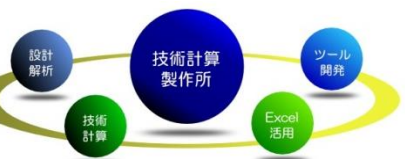
Step	DFT 点数	DFT 実行数	基底		バタフライ演算	
1	$2^1 = 2$	2^{n-1} 組	w_0, w_1			2^{n-1} 組 ...
2	$2^2 = 4$	2^{n-2} 組	w_0, w_1, w_2, w_3			2^{n-2} 組 ...
3	$2^3 = 8$	2^{n-3} 組	$w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7$			2^{n-3} 組 ...
4	$2^4 = 16$	2^{n-4} 組	$w_0, w_1, \dots, w_{15}$			2^{n-4} 組 ...

...

バタフライ演算は、Step k ($1 \leq k \leq n$)において 2^k 点DFTを 2^{n-k} 組分実行する



バタフライ演算の実行手順



4. 2. 3. FFTの実行ロジック（一般化）

FFTとDFTの計算回数比較

FFTの計算回数： $N \log_2 N$
DFTの計算回数： N^2

↓ 一目瞭然

データ点数増えるほど、
FFTの計算回数は圧倒的に少ない

べき乗	データ点数	計算回数		比率
		FFT	DFT	
5	32	160	1024	6
6	64	384	4096	11
7	128	896	16384	18
8	256	2048	65536	32
9	512	4608	262144	57
10	1024	10240	1048576	102
11	2048	22528	4194304	186
12	4096	49152	1.678E+07	341
13	8192	106496	6.711E+07	630
14	16384	229376	2.684E+08	1170
15	32768	491520	1.074E+09	2185
16	65536	1.049E+06	4.295E+09	4096
17	131072	2.228E+06	1.718E+10	7710
18	262144	4.719E+06	6.872E+10	14564
19	524288	9.961E+06	2.749E+11	27594
20	1048576	2.097E+07	1.100E+12	52429
21	2097152	4.404E+07	4.398E+12	99864
22	4194304	9.227E+07	1.759E+13	190650

Excel列数
MAX

Excel行数
MAX

