ベルト周長計算

目次

1.ベルト周長ノミナル値計算
1.1.プーリ巻き付け径既知の場合のベルト周長計算
1.2.ベルト周長と減速比が既知の場合のプーリ巻き付け径算出
1.3.ベルト周長と巻き付け径が既知の場合の軸間距離算出
2.プーリ・ストローク量計算
3.ベルト長公差計算
3.1.L.S.（単純積算）によるベルト長公差計算
3.2.R.S.S.（二乗和）によるベルト長公差計算

1. ベルト周長ノミナル値計算

以下の計算は、ベルトにたるみがなく、また伸びもない状態を前提とする。

1. 1. プーリ巻き付け径既知の場合のベルト周長計算

プーリ巻き付け時の駆動側半径（R_r）と、被駆動側半径（R_n）が既知の場合のベルト周長ノミナル値計算式は、次の通りである。

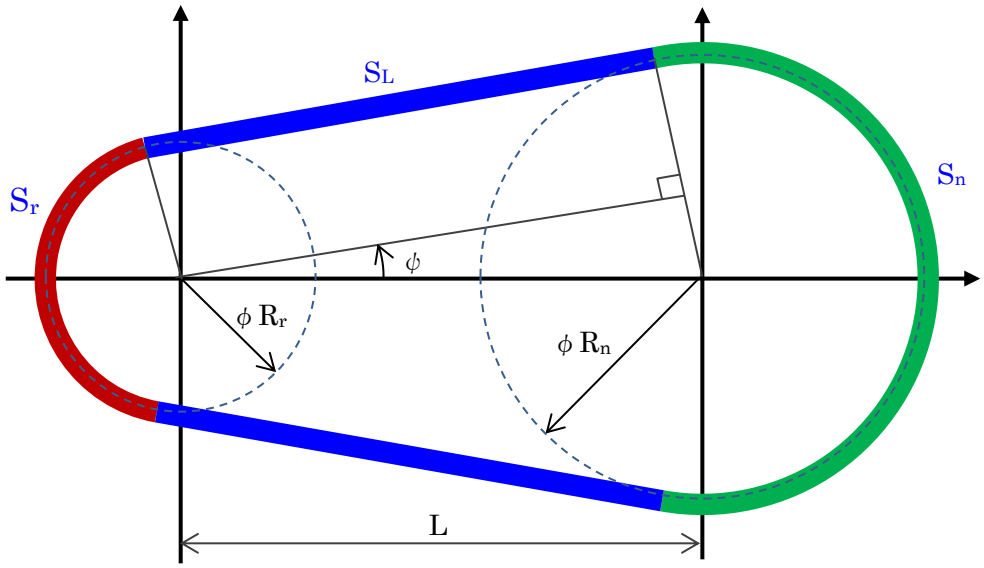

図 1.1－1　ベルト周長計算モデル

上図の関係から、角度 ϕ は以下で定まる。

$$\psi = \sin^{-1}\frac{R_n - R_r}{L} \quad \cdots (1.1-1)$$

従って、各部長さは以下によって定められ、

$$\begin{cases} S_r = \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) R_r \\ S_n = \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) R_n \\ S_L = L\cos\psi \end{cases} \quad \cdots (1.1-2)$$

ベルト周長 S が求められる。

$$S = 2(S_r + S_n + S_L) = \pi(R_n + R_r) + 2\psi(R_n - R_r) + 2L\cos\psi \quad \cdots (1.1-3)$$

1．2．ベルト周長と減速比が既知の場合のプーリ巻き付け径算出

図 1.1－1 から、R_r と R_n の間には次の関係が成り立っている（(1.1－1）式を書き直しただけ)。

$$R_n - R_r = L\sin\psi \quad \cdots (1.2-1)$$

ここで次の減速比（レシオ）γ をとる（減速なので、駆動側が分子で被駆動側が分母→車の Low を想定すればイメージがつく)。

$$\gamma = \frac{R_r}{R_n} \quad \tau \leftrightarrow \quad R_r = \gamma R_n \quad \cdots (1.2-2)$$

（1.1－3)、(1.2－2）に代入して変形する。

$$S = 2L\cos\psi + \pi(1+\gamma)R_n + 2\psi(1-\gamma)R_n \quad \cdots (1.2-3)$$

$$(1-\gamma)R_n = L\sin\psi \quad \rightarrow \quad R_n = \frac{L\sin\psi}{(1-\gamma)} \quad \cdots (1.2-4)$$

これを（1.1－3）式に代入し、R_n を消去する。

$$S = 2L\cos\psi + 2L\psi\sin\psi + \pi\frac{1+\gamma}{1-\gamma}L\sin\psi \quad \cdots (1.2-5)$$

これを φ について解きたいのだが、そのままでは解けないためニュートン法により近似的に求める。

$$h(\psi) = 2L\cos\psi + 2L\psi\sin\psi + \pi\frac{1+\gamma}{1-\gamma}L\sin\psi - \mathrm{S} \quad \cdots (1.2-6)$$

という関数を設定したとき、その φ に関する 1 階微分は次のようになる。

$$h'(\psi) = 2L\psi\cos\psi + \pi\frac{1+\gamma}{1-\gamma}L\cos\psi \quad \cdots (1.2-7)$$

ニュートン法は、適当な初期解 ϕ_1 を h(φ)に与え、繰り返し計算によって徐々に計算値と実解との差を縮めていくことで収束解を得る数値計算法で、n 回目の解を ϕ_n と置くとき、

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \frac{h'(\psi_n)}{h(\psi_n)} \quad \cdots (1.2-8)$$

として n＋1 回目の解を決める。このとき、h(ϕ_{n+1})の絶対値が、ある値（収束判定値）a_{lim} 以下なら解に収束したものとして、その値を近似的に解とするものである。

$$\text{収束判定式}：|h(\psi_{n+1})| \leq a_{lim} \quad \cdots (1.2-9)$$

a_{lim} は必要とする計算精度にあわせて設定する（10^{-6} 程度）。

上記で定まった ϕ を ϕ_c とすると、プーリ径はそれぞれ次のように近似的に定まる。

$$\begin{cases} R_r \cong \dfrac{\gamma}{(1-\gamma)} L \sin\psi_c \\ R_n \cong \dfrac{1}{(1-\gamma)} L \sin\psi_c \end{cases} \quad \cdots (1.2-10)$$

1．3．ベルト周長と巻き付け径が既知の場合の軸間距離算出

（1.2－1）式を L の式に書き換える

$$L = \frac{R_n - R_r}{\sin\psi} \quad \cdots (1.2-1)$$

このとき、Rr、Rn の関係によって場合分けを行う。

（1）Rr＝Rn の場合

ϕ ＝0 であるから軸間距離 L は（1.1－3）式から即座に求まる。

$$S = 2\pi R_r + 2L \quad \rightarrow \quad L = \frac{S}{2} - \pi R_r \cdots (1.3-1)$$

（2）Rr≠Rn の場合

（1.1－3）式を変形することで、軸間距離 L は即座に求まる。

$$L = \frac{S - \pi(R_n + R_r) - 2\psi(R_n - R_r)}{2\cos\psi} \quad \cdots (1.3-2)$$

2．プーリ・ストローク量計算

ベルト巻き付け径が変化したときの、プーリの移動量（Pst）を求める。

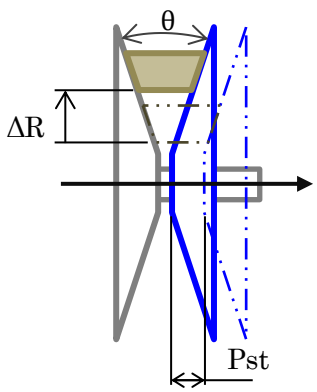

図 2－1　プーリ移動

この計算は上図の関係から簡単に求められる。
巻き付け半径変化量を ΔR、ベルト挟み角を θ とする

$$P_{st} = \Delta R \tan\frac{\theta}{2} \quad \cdots (2-1)$$

3. ベルト長公差計算

公差計算は主に次の二通りの考え方で計算される。

（1）単純積算（L.S.：Linear Sum）

（2）二乗和（R.S.S.：Root Sum Square）

（1）に関しては確率的な意味はあまりない。単純に公差を積み上げたもので、不必要に公差が大きくなりやすい。（2）は誤差伝播の法則に基づいている。通常各公差は正規分布に従うものとし、それぞれは共通の σ 係数 κ （κ＝3 が一般的）の値を用いる。その場合、R.S.S で計算した全体の公差は、誤差伝播の法則に従い κ σ の値となる。

3. 1. L.S.（単純積算）によるベルト長公差計算

R_r、R_n、L の公差をそれぞれ($\Delta R_{ru}, \Delta R_{rl}$)、($\Delta R_{nu}, \Delta R_{nl}$)、($\Delta L_u, \Delta L_l$)とする（添字 u は公差上限、l は下限。“－”公差時、負号もパラメータに含める（例：ΔR_{rl}＝-0.5））。

ベルト長最大は、各寸法がすべて公差最大のときであり、ベルト長最小は各寸法が公差最小のときとなるは自明。従って、ベルト長最大は（1.1－3）式を使って次のように定められる。

$$\begin{cases} R_{rMAX} = R_r + \Delta R_{ru} \\ R_{nMAX} = R_n + \Delta R_{nu} \\ L_{MAX} = L + \Delta L_u \end{cases} \quad \rightarrow \quad \psi_u = \sin^{-1}\frac{R_{nMAX} - R_{rMAX}}{L_{MAX}}$$

$$S_{MAX} = 2L_{MAX}\cos\psi_u + \pi\{R_{nMAX} + R_{rMAX}\} + 2\psi_u\{R_{nMAX} - R_{rMAX}\} \quad \cdots (3.1-1)$$

ベルト長最小も同様にして定まる。

$$\begin{cases} R_{rmin} = R_r + \Delta R_{rl} \\ R_{nmin} = R_n + \Delta R_{nl} \\ L_{min} = L + \Delta L_l \end{cases} \quad \rightarrow \quad \psi_l = \sin^{-1}\frac{R_{nmin} - R_{rmin}}{L_{MAX}}$$

$$S_{min} = 2L_{min}\cos\psi_l + \pi\{R_{nmin} + R_{rmin}\} + 2\psi_l\{R_{nmin} - R_{rmin}\} \quad \cdots (3.1-2)$$

3. 2. R.S.S.（二乗和）によるベルト長公差計算

この場合、各寸法公差は正規分布に従う κ σ の値と仮定しなければならない。従って、公差上限／下限の中央をノミナル値とし、公差レンジの半分を±公差と置き換える。

次に、(1.1－3) 式を各パラメータで偏微分し、それらのベルト長に対する感度を求める。

ただし、L、Rr、Rn の関数である角度 ϕ を含んでいるため、まずは ϕ による影響を確認する。（1.1－1）式は（1.2－1）式の逆関数である点を考慮して、（1.2－1）式について各パラメータで偏微分を行う。その際、g＝sin ϕ とおく。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial L} = -\dfrac{R_n - R_r}{L^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial R_n} = \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{\partial g}{\partial R_r} = -\dfrac{1}{L} \end{cases} \qquad \cdots (3.2-1)$$

従って、g の公差 δ g は、変数の独立性と誤差伝播の法則により

$$(\delta g)^2 = \frac{1}{L^2}(\delta R_n)^2 + \frac{1}{L^2}(\delta R_r)^2 + \frac{(R_n - R_r)^2}{L^2}(\delta L)^2 \quad \cdots (3.2-2)$$

さらに、g を ϕ で偏微分すると、

$$\frac{\partial g}{\partial \psi} = \cos\psi \quad \rightarrow \quad (\delta g)^2 = (\cos\psi)^2(\delta\psi)^2 \quad \cdots (3.2-3)$$

以上より、

$$(\delta\psi)^2 = \frac{1}{(\cos\psi)^2}\left\{\frac{1}{L^2}(\delta R_n)^2 + \frac{1}{L^2}(\delta R_r)^2 + \frac{(R_n - R_r)^2}{L^2}(\delta L)^2\right\}$$

$$= \frac{(\delta R_n)^2 + (\delta R_r)^2 + (R_n - R_r)^2(\delta L)^2}{(L\cos\psi)^2} \quad \cdots (3.2-4)$$

が得られる。ところで、図 1.1－1 から ϕ は明らかに－ π /2～ π /2 の範囲内にある。よって、分母は非負かつ 0 でない。

次に、（1.1－3）式について同様の作業を行う。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial L} = 2\cos\psi \\ \dfrac{\partial S}{\partial D_n} = \pi + 2\psi \\ \dfrac{\partial S}{\partial D_r} = \pi - 2\psi \\ \dfrac{\partial S}{\partial \psi} = 2(R_n - R_r) - 2L\sin\psi \end{cases} \qquad \cdots (3.2-5)$$

（3.2－4）式によってすでに ϕ は誤差伝播の法則に基づく公差設定がなされている。従って、（3.2－5）式の結果とあわせてベルト長の誤差を定める次式が与えられる。

$$\delta S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)^2(\delta L)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial R_r}\right)^2(\delta R_r)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial R_n}\right)^2(\delta R_n)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2(\delta\psi)^2 \quad \cdots (3.2-6)$$

各寸法公差の確率密度関数が正規分布に従わない場合は、確率密度関数に合わせた計算式を立て直すか、確率密度関数に対して変数変換を行い、正規分布に従う、あるいは近似的に従うモデルを作成し、それをもとに上式に代入していく方法がある。しかしながら、確

率密度関数は無数に存在し、その 1 個 1 個について計算式を立て直したりパラメータ変換したりするのは複雑かつ厄介であるため、ここでは触れない。