1．フーリエ変換の概念

1．1．フーリエ級数展開

1．2．複素フーリエ級数展開

1．3．フーリエ変換（非周期関数への拡張）

1．1．フーリエ級数展開

すべての周期関数は三角関数の和で表せる ＝ フーリエ級数展開

周期Tの関数：$f(t)=f(t+T)$に対し、

$$f(t)=\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{T}kt+b_k\sin\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi kt}{T}dt \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi kt}{T}dt \end{aligned}\right\}\text{フーリエ係数}$$

※：sinとcosが両方含まれることで位相特性がうまれる

$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\psi)$、 $\tan\psi=b/a$

1. 2. 複素フーリエ級数展開

フーリエ級数展開は、複素形式を用いて簡略化できる

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \quad (\because e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$$

を用いて

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{2\pi}{T}kt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\right\}$$

$c_0 = \frac{a_o}{2}, c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \bar{c}_k$とおけば

複素フーリエ級数展開

$$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \\ c_k = \displaystyle\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\, dt \end{cases}$$

1．3．フーリエ変換（非周期関数への拡張）

周期$T \to \infty$の関数：$f(t)$ =**非周期関数**

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t')e^{-i\frac{2\pi}{T}kt'}\,dt'\right\}e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t')e^{-i\omega_k(t'-t)}\,dt'\right\}\quad\left(\because \Delta\omega=\frac{2\pi}{T},\omega_k=k\Delta\omega\right)$$

$$\xrightarrow{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega(t'-t)}dt'\,d\omega\quad\left(\because \lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega_k)\Delta\omega=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega\right)$$

非周期関数に対するフーリエ級数展開 = **フーリエ変換**

（T→∞の極限におけるフーリエ級数展開）

フーリエ変換　：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$

フーリエ逆変換：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$

1．3．フーリエ変換（非周期関数への拡張）

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

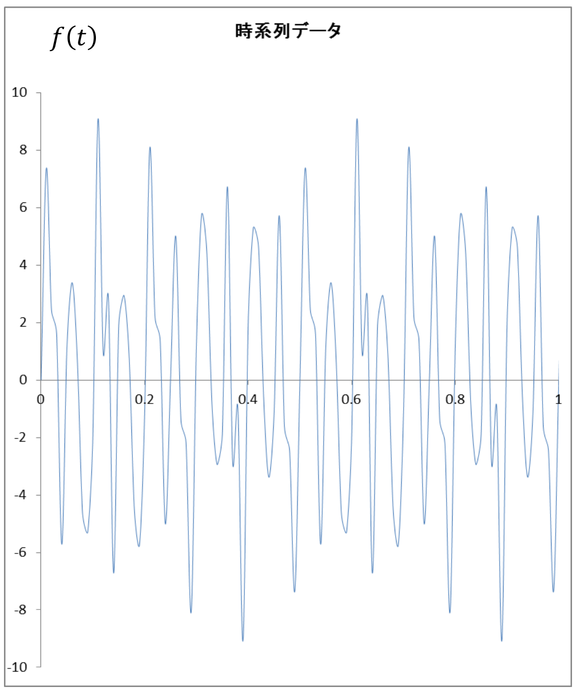
（フーリエ変換）

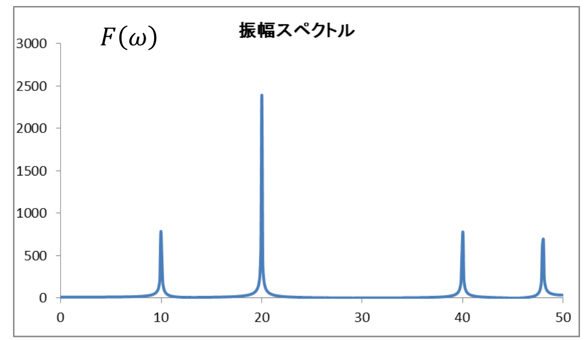
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

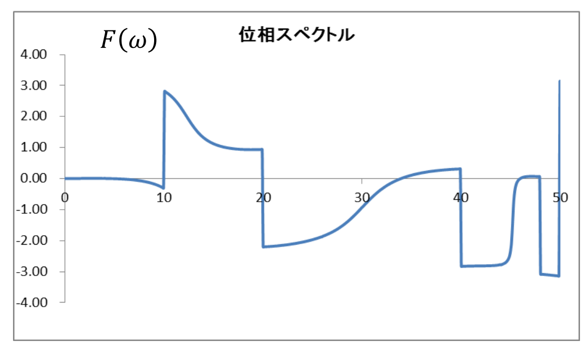
（フーリエ逆変換）

時間領域を周波数領域に変換

周波数領域を時間領域に変換







※：通常データは実軸側のみで虚軸側はすべて“0”

※：実軸/虚軸で表す場合もあり